Projekt i differentialligninger, samt optimering

Alex Khan

16/08/22

"If not now, then when?"

1 Den logistiske ligning revisited

Vi har i timerne arbejdet med den logistiske differentialligning, som vi udtrykker på denne måde

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - \frac{x}{L}) \tag{1}$$

hvor $x(t)$ er populationens størrelse, k en konstant relateret til artens reproduktionsevne, og L omgivelsernes bæredygtighed.
I undervisningnoterne udledte vi en formel for løsning af denne type ligninger. En anden måde at løse denne ligning på er ved separation af variable. Dette kræver dog at man først laver en såkaldt partialbrøksopspaltning, som vi gennemgår i timerne.
Benyt nu jeres nye viden om partialbrøksopsplitninger til at integrere de integraler man får efter at have separeret variable i (1), og vis, at løsningen kan skrives som

$$x(t) = \frac{Lx_0}{x_0 + (L - x_0)e^{-kt}}, \tag{2}$$

hvor x_0 betegner populationens størrelse til starttidspunktet.
Giv nu korte men præcise svar på følgende spørgsmål

1. Vis at (1) kan omskrives til lærebogens $y' = ay(M - y)$

2. Hvad menes der med *logistisk* i navnet på differentialligningen?

3. Ofte omtales (1) som den logistiske *model*. Hvad mener man med ordet model?
4. Angiv eksempler på biologiske systemer hvis udvikling styres af (1).
5. Differentier (2), og vis, at den tilfredstiller (1).
6. Benyt (1) til at udtale jer om betydningen af parametrene k og L. Vink: højre side af ligningen er en parabel.
7. Undersøg hvilke konsekvenser en ændring af værdierne af parametrene x_0, k og L har for løsningskurven.
8. Hvad har man brug for, for at finde parametrene x_0, k og L til en given løsningskurve?
9. Angiv to konstante løsninger til (1).
10. Antag at $x(t) > L$. Begrund vha (1) hvordan populationen udvikle sig. Der ønskes ikke udregninger.
11. Udviser (1) på noget tidspunkt eksponentiel vækst? Begrund jeres svar vha (1).
12. Hvornår er væksthastigheden størst (for hvilken t-værdi), og hvad er værdien af væksthastigheden, når den er størst.
13. Løsningskurven til (1) har en vendetangent. Forklar betydningen af denne, og find dens koordinater.

2 Økonomien i udnyttelsen af en vedvarende ressource

En population som tilsyneladende adlyder den logistiske model er den antarktiske blåhval. Sidstnævnte har interesse for fiskeriindustrien, og man bliver, såfremt man vil beskrive udviklingen af blåhvalen, nødt til at modificere (1). Hvis man fanger blåhvaler med $h(t)$ enheder per år, vil udviklingen i populationens størrelse adlyde følgende differentialligning

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - \frac{x}{L}) - h(t) \tag{3}$$

Antag, at fangstraten, $h(t)$, er lig med vækstraten, altså, at $h(t) = kx(1 - \frac{x}{L})$. Dette vil betyde, at $\frac{dx}{dt} = 0$, og altså, at populationsstørrelsen vil være konstant.
Antag, at hver blåhval repræsenterer en værdi på p kr for fiskeriindustrien. Den årlige indkomst, T, fra blåhvalfangst bliver så med ovennævnte fangstrate

$$T = ph(t) = pkx(1 - \frac{x}{L}). \tag{4}$$

Det spændende spørgsmål er nu, hvorledes man maksimerer indkomsten fra blåhvalfangst.

1. Maksimer indkomsten fra blåhvalfangst ud fra (4).
2. Angiv med udgangspunkt i dit svar en strategi for at maksimere økonomien i blåhvalsfangst.

3 Aktuel værdi af penge tjent i femtiden

Vi har i foregående afsnit ikke taget hensyn til at fremtidigt tjente penge i nutiden er mindre værd. En krone som tjenes om t år har en lavere værdi end en krone tjent i dag, idet man ville kunne investere den tjente krone i dag og høste renter af den i fremtiden. Jo højere rente, des mere tjener man på investerede penge, og des lavere er den aktuelle værdi af penge tjent i fremtiden.

3.1 Øjeblikkelig rentetilskrivning

I første g så vi kapitalfremskrivningsformlen, med hvilken man beregner sin nye kapital, K_n, ud fra startkapital, K_0, rentesats per termin, r, og antallet af terminer, n, givet ved $K_n = K_0(1 + r)^n$.
Eksempelvis bliver 10000 kr med en rentesats på 3 procent per år efter et år til $10000(1+0.03)^1 = 10300$ kr. Efter to år bliver det til $10000(1+0.03)^2 \approx 10609$ kr.
Antag nu, at man i stedet for at tilskrive rente en gang om året, tilskriver renten på 3 procent to gange om året. Så får man $10000(1+\frac{0.03}{2})^2 = 10302.25$ kr. Dette er 2.25 kr mere end når man tilskriver rente en gang om året, og skyldes renters rente. Efter 6 måneder tilskrives renten første gang, hvorved man får 150 kr i rente. Ved anden rentetilskrivning ved udgangen af året får

n	$(1+\frac{1}{n})^n$
1	2
10	2.59374...
100	2.70481...
1000	2.71692...
10000	2.71815...
100000	2.71827

Table 1: Approksimationer til e

man 1.5 procent i rente på de 150 kr man tjente i rente efter første tilskrivning, som er 2.25 kr.
Man kunne også tilskrive renten dagligt i et helt år, hvilket ville få regnestykket til at se sådan ud: $10000(1+\frac{0.03}{365})^{365} \approx 10304.53$ kr, altså 4.53 kr mere end ved en årlig tilskrivning.
Man kunne også gøre det hvert sekund eller hvert nanosekund eller hvert femtosekund, eller endnu bedre, hele tiden. Med hele tiden mener vi at vi vil tilskrive rente hver gang tiden er gået infinitesimalt meget frem. Sagt på en anden måde lader vi tidsintervallet mellem to på hinanden følgende rentetilskrivninger gå mod nul. Regnestykket bliver nu $\lim_{n\to\infty} 10000(1+\frac{0.03}{n})^n \approx 10304.54$ kr, hvilket overraskende nok kun er en øre mere end ved daglig rentetilskrivning.
Vi fandt denne slutværdi ved at se på grænseværdien af rentetilskrivningsdelen for antallet af terminer, n, gående mod uendelig, som vi søger at illustrere i tabel 1, som svarer til en årlig rente på 100 %. Ser man på en årlig rente på 3 %, bliver grænseværdien $e^{0.03}$, som får de ovennævnte 10000 kr til at gro til 10304.54 kr efter et år.

Ud fra tabellen kan man ane at $(1+\frac{1}{n})^n$ går mod den ovennævnte værdi af e på 2.718281828459045..., dog er tabelværdien kun korrekt op til 4 decimaler for $n = 10000$, som er en meget langsom konvergens.

3.2 Optimering under hensyntagen til aktuel værdi af penge tjent i fremtiden

Antag, at renten er på δ procent, og at renten tilskrives øjeblikkeligt. Dette betyder, at den aktuelle værdi af indkomsten fra blåhvalsfiskeri, $ph(t)dt$, som man tjener mellem t og $t+dt$ år er $e^{-\delta t}ph(t)dt$.

Den totale aktuelle værdi af al fremtidig indkomst fra blåhvalsfiskeri er

$$T = \int_0^\infty e^{-\delta t} p h(t) dt. \tag{5}$$

Det spændende spørgsmål er nu hvorledes man optimerer fangststrategien under hensyntagen til den devaluerede aktuelle værdi af fremtid indkomst fra blåhvalfangst.
For at undersøge dette indsætter vi udtrykket for $h(t)$ fra (3) i (5), og får

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty p e^{-\delta t} \left[k x \big(1 - \frac{x}{L}\big) - \frac{dx}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^\infty k p e^{-\delta t} x \big(1 - \frac{x}{L}\big) dt - \int_0^\infty p e^{-\delta t} \frac{dx}{dt} dt. \end{aligned} \tag{6}$$

Det andet integrale i (6) kan delvist løses vha partiel integration, og man får

$$\begin{aligned} T &= \int_0^\infty k p e^{-\delta t} x \big(1 - \frac{x}{L}\big) dt - \left[p e^{-\delta t} x \Big|_0^\infty + \int_0^\infty p \delta e^{-\delta t} x dt \right] \\ &= p x(0) + \int_0^\infty p e^{-\delta t} \left[k x \big(1 - \frac{x}{L}\big) - \delta x \right] dt \end{aligned} \tag{7}$$

1. Maksimer (7) mht populationsstørrelsen, x, og vis, at svaret bliver $x = (k - \delta)\frac{L}{2k}$.

2. Sammenlign ovennævnte svar med svaret uden hensyntagen til fremtidigt tjente penges devaluering. Hvilken betydning har renten δ for populationsstørrelsen.

3. Hvad sker der hvis $\delta \geq k$? Kunne der mangle antagelser i modellen som ville kunne afvænne en så trist skæbne? Angiv mulige manglende antagelser.

4. Vurder på baggrund af svarene til spørgsmålene, om det for et samfund er rimeligt, udelukkende at lade økonomiske interesser diktere forvaltningen af biologiske arter som fx blåhvalen.