Projekt i diskret matematik

Alex Khan

19/02/23

I dette projekt skal vi lære at benytte Eulers algoritme til at løse differentialligninger. Når man for første gang kaster sig ud i denne type udregninger er det vigtigt at benytte en differentialligning, hvis analytiske løsning man i forvejen kender. Vi vil til dette formål benytte den logistiske differentialligning modelleret på frøer, som vi har løst analytisk. Detaljerne vil være som i øvelse 2.7, s. 18, i Auerbachs noter om differentialligninger.

1 Opgave 1

Vi skriver den logistiske differentialligning som

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - \frac{x}{L}) \tag{1}$$

hvor $x(t)$ er antal frøer, k en konstant relateret til frøernes reproduktionsevne, og L omgivelsernes bæredygtighed.
Vi fandt ved separation af variable, at løsningen var givet ved

$$x(t) = \frac{Lx_0}{x_0 + (L - x_0)e^{-kt}}, \tag{2}$$

hvor x_0 betegner antal frøer i søen til starttidspunktet.
I skal i denne opgave integrere den logistiske ligning modelleret på frøer vha Eulers algoritme. Find vha et regneark populationens størrelse, $x_n(t)$, som en diskret funktion af tiden. Sammenlign værdien I opnår i hvert tidsskridt med den analytiske løsning, og lav en tabel som den vist i tabel 1. I skal dokumentere kortfattet hvorledes I er nået frem til værdierne i tabellen ved at vise udvalgte udregninger.

n	t	x_n	x_{eksakt}
0	0	25	25
1	0.001	25.0294	25.0293
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	0.02	25.5934	25.5937

Table 1: Tilnærmede og eksakte værdier af frøpopulationen baseret på Eulers algoritme og eksakt løsning

2 Høst

Vi opdrætter ikke frøer i vores baghave for sjovs skyld. Næ nej, vi vil gerne tjene en ekstra skilling på det, idet vi har valgt en type frøer som anses for at være en delikatesse i gourmet restauranter.
Men hvordan skal vi bære os ad med at "høste" vores frøer? Vi vil gerne optimere indkomsten på en sådan måde, at vi høster lige akkurat så mange som muligt, uden at populationen dør ud.
Den logistiske differentialligning hvis løsning repræsenterer udviklingen i frøpopulationen bliver nu til

$$\frac{dx}{dt} = kx(1 - \frac{x}{L}) - h \tag{3}$$

hvor h er høsteraten eller høstehastigheden, givet i enheden "antal frøer per år", eller blot $\frac{1}{år}$.
I skal nu angive hvorledes I vil høste jeres frøer på en sådan måde, at I maksimerer jeres fortjeneste, og samtidigt sikrer jer, at I kan fortsætte med at gøre det i fremtiden.

2.1 Brute force

Vi har nu med Eulers metode en algoritme, hvormed vi kan løse næsten enhver form for differentialligninger. Også (3).
Under denne ominøst lydende titel gemmer sig ønsket om at I *blot* integrerer ligning (3) numerisk, altså vha Eulers metode. Lav nogle regneark med løsning til (3), hvor I vælger en fast værdi for høstraten h, for hvert regneark. Prøv eksempelvis at lave 4 regneark med følgende værdier af $h = 5, 25, 50, 100$.
Analyser jeres output nøje, og skriv en kort konklusion. Overvej dog, om

jeres output giver ophav til yderligere undersøgelser af værdien af h. Husk, at vi er ude efter en optimal løsning.

2.2 En elegant og intelligent løsning

Ved blot at inspicere (3) og figur 1 (figur 2.4, s 15, i Auerbachs noter), kan man løse opgaven uden at spilde tiden på én eneste udregning.
Hvis man er blandt de heldige der har indset dette, skal man dokumentere sin sag grundigt.

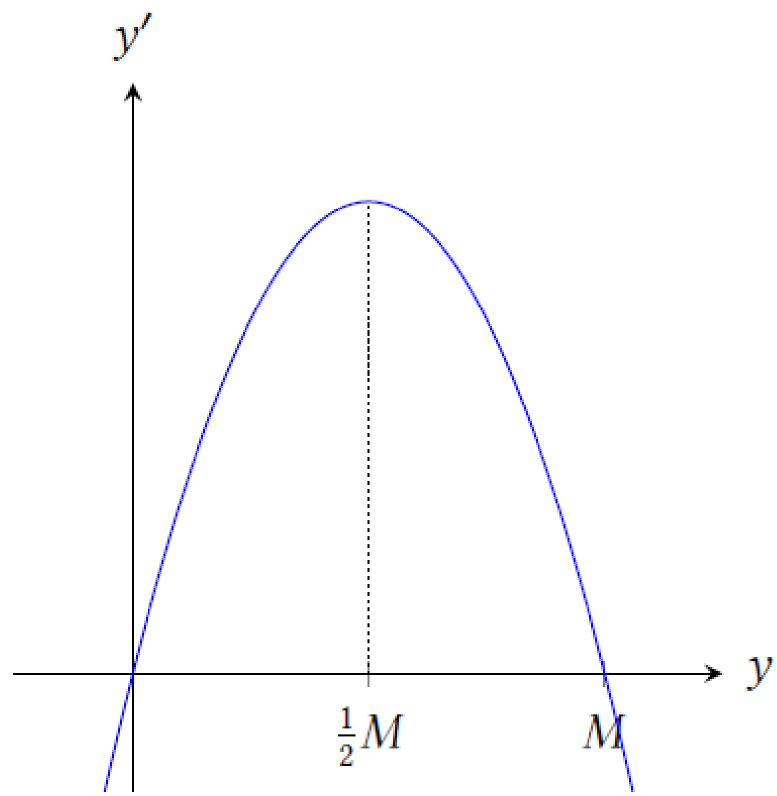

Figure 1: Væksthastighed som funktion af populationsstørrelse. Bemærk at Auerbach benytter y', y, og M, i stedet for vores $\frac{dx}{dt}$, x, og L.