

FysikLab: Kvantetema



En samling af forsøg med kvantetema, der kan gennemføres i besøgslaboratoriet FysikLab ved FKF - Institut for Fysik, Kemi og Farmaci, SDU Odense.

Heisenbergs usikkerhedsrelation

Enkeltspaltesdiffraktion

Bestemmelse af Plancks konstant med LED

Fotoelektrisk effekt

Bestemmelse af Plancks konstant

Dobbeltspalteforsøget med polarisering

Fra interferens til "quantum eraser"
– en model for entanglement

Brian Skov Sørensen (marts 2026)¹

¹ [This work is licensed under CC BY 4.0.](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

FysikLab Forsøgsvejledning



FKF - Institut for Fysik, Kemi og Farmaci

Heisenbergs usikkerhedsrelation

Enkeltspaltesdiffraktion

Brian Skov Sørensen (januar 2026)¹

¹ [This work is licensed under CC BY 4.0.](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Intro

” Jo mere præcist en partikels position bestemmes, desto mindre præcist kan dens impuls bestemmes – og omvendt.”

Den kvantemekaniske formulering af Heisenbergs usikkerhedsrelation skrives typisk sådan:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Her står Δx for usikkerheden i position og Δp for usikkerheden i impuls. I stedet for Plancks konstant h , bruger man ofte \hbar , som er lig $h/2\pi$.

Når der står ”den kvantemekaniske formulering”, er det fordi Heisenbergs oprindelige argument ikke havde denne form. I 1927 brugte han et tankeeksperiment inspireret af mikroskopets opløsningsgrænse og af, at man kan knytte fotonens impuls til dens bølgelængde:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

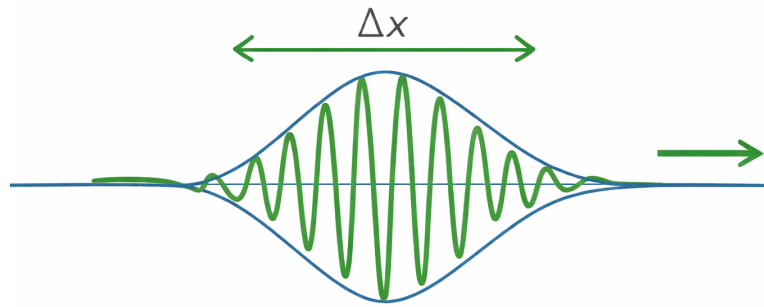
Her står p for fotonens impuls, λ for fotonens bølgelængde, og h er Plancks konstant. ($h = 6,6260715 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$).

I denne øvelse skal du lave et eksperiment der illustrerer det klassiske bølgefænomen, som ligger bag Heisenbergs oprindelige argument. For hans oprindelige idé er i virkeligheden en bølgesætning forklædt som kvantemekanik.

Den kvantemekaniske, og derfor matematiske udledning af usikkerhedsrelationen, kom kort efter Heisenbergs postulat. Den tager udgangspunkt i, at en partikel ikke beskrives som et punkt med en impuls, men med en bølgefunktion².

På figur 1 er det illustreret hvordan en fotons bølgefunktion ser ud. Denne bølgepakke er dannet ved at lave en superposition af forskellige bølger med næsten samme bølgelængde. Der er en indbygget egenskab ved sådan en bølgepakke; en stærk rumlig lokalisering (lille Δx) kræver en superposition af mange forskellige bølgelængder. Fordi bølgelængde hænger sammen med impuls, som det fremgår af formlen ovenfor, vil en velbestemt position derfor betyde, at impulsen ikke kan være velbestemt.

² Usikkerhedsrelationen kan udledes matematisk på flere måder. I Schrödinger-formalismen kan man forstå den via bølgepakker og Fourieranalyse (en smal rumlig bølgepakke kræver et bredt spektrum af bølgetal/bølgelængder). I operatorformalismen kan den udledes fra kommutatorrelationen mellem positions- og impulsoperatoren, ofte skrevet kompakt i Dirac-notation. Den viste sammenhæng mellem bølgelængde og impuls gælder også for partikler, men omtales da som de Broglie-relationen.



Figur 1: En lokaliseret bølgepakke der bevæger sig mod højre. Δx angiver bølgepakkens rumlige udbredelse. Jo mindre Δx er (jo mere lokaliseret bølgen er), desto flere bølgelængder må der indgå i superpositionen, for at danne bølgepakken. Derfor bliver spredningen i impuls større.

Omvendt: En bølge med veldefineret impuls – altså med en enkelt eller få bølgelængder – vil nødvendigvis være udbredt over et større område i rummet (stor Δx) og derfor ikke have en velbestemt position.

Baggrund og teori

Heisenbergs oprindelige formulering i 1927 af usikkerhedsprincippet, byggede ikke på beskrivelsen af partikler med bølgefunktioner, men på et tankeeksperiment der involverede datidens viden om diffraktion og fotonens impuls.

På dette tidspunkt havde Einstein udledt, at fotonen havde en impuls, selvom den er masseløs. Og Compton (1923) havde målt denne impuls og set at fotoner overfører impuls til elektroner ved sammenstød.

Heisenbergs tankeeksperiment går på, at vil man måle en elektrons position med høj præcision, så kræver det sammenstød med en foton med kort bølgelængde (høj impuls). Men en foton med høj impuls overfører impuls til elektronen på en uforudsigelig måde, Derfor kan position og impuls af elektronen ikke bestemmes samtidigt med vilkårlig præcision.

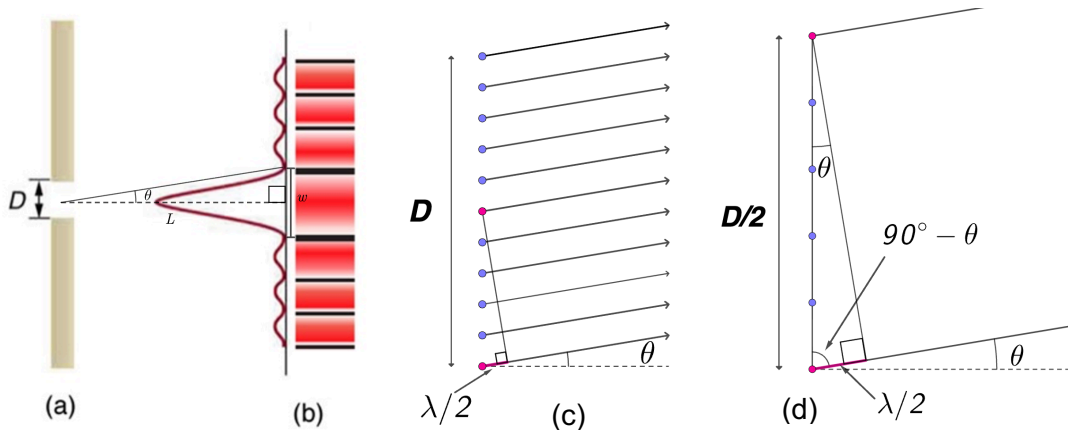
Med denne måde at argumenterer på, lyder det som et måleproblem – det viste sig kort tid efter, at målinger intet har med det at gøre. Heisenbergs usikkerhedsrelation er en konsekvens af kvantemekanik og en egenskab ved virkeligheden som den er.

I det følgende skal du holde dig for øje, at usikkerhedsargumentet udledes ved at analysere fotonen som den der "måler". Det kan derfor overføres til den partikel man vil måle på.

Så hvorfor skal bølgelængden være kort?

I 1927 var det [optiske transmissionsmikroskop](#) et veletableret måleinstrument. Et centralt forhold ved et sådant mikroskop er, at lyset, som bruges til at bestemme placeringen af det man vil se på, nødvendigvis skal passere gennem en begrænset åbning i instrumentet. Denne rumlige begrænsning medfører, at lyset efterfølgende spredes i forskellige retninger.

I denne øvelse bruger vi derfor en enkelt spalte som en forenklet model for denne rumlige begrænsning. Spalten skal ikke opfattes som et mikroskop i sig selv, men som et redskab til at undersøge, hvordan indsnævring i rummet fører til spredning i retning. Det er netop denne geometriske sammenhæng, som ligger til grund for Heisenbergs oprindelige argument.



Figur 2. (a) spalteåbning med størrelsen D . (b) Intensiteten af den diffrakterede bølge fra spalteåbningen D^3 . (c) "uendeligt" mange punktkilder inde i spalteåbningen ud fra Huygens' princip, med retninger mod første minimum. (d) er en forstørrelse af (c)

I figur 2 kommer lyset ind gennem spalten med åbningen D fra venstre i (a), og intensiteten af lyset på en skærm ses i (b). Den centrale top i diffraktionsmønstret angiver den vinkelmæssige udspredding af lyset efter spalten.

I et mikroskop er det netop denne type vinkeludbredelse, der begrænser, hvor præcist en position kan bestemmes. Ved hjælp af Huygens' princip og interferens udleder vi derfor nu diffraktionsmønstret på skærmen. Metoden svarer til den, der anvendes ved udledning af interferensmønstre fra en dobbeltspalte i fysikundervisningen.

Når en plan bølge sendes gennem en spalte med åbningen D , breddes bølgen ud i alle retninger og giver anledning til mønstret i (b) på grund af interferens. Vi skal finde betingelsen for det første minimum angivet ved vinklen θ vist i (a)+(b).

Figur 2 (c) er en illustration af hvad der foregår inde i spalteåbningen. Ifølge Huygens princip kan man betragte en bølgefront som *uendeligt* mange punktkilder til dannelsen af nye bølger – punktkilderne er vist som prikker. Pilenes fra hver punktkilde peger i retningen mod det første minimum på skærmen, for en bølge med bølgelængden λ .

³ Fra OpenStaxCollege: College Physics.

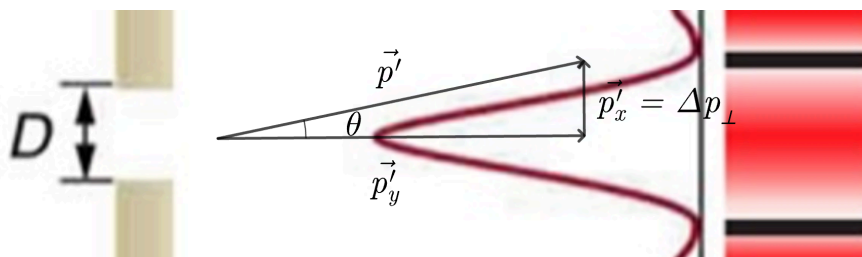
Argumentet starter ved at betragte bølgen fra punktet i midten af åbningen. Den vil interferere destruktivt med bølgen fra det nederste punkt ude ved kanten af åbningen, hvis der er en forskel i rejselængden for de to bølger på $\lambda/2$ ud til skærmen. Vinklen θ hvor det er opfyldt kan findes geometrisk ud fra figur 2 (d):

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda/2}{D} = \frac{\lambda}{2D}$$

Som par interfererer disse to bølger altså destruktivt i retningen angivet ved θ . Går vi et punkt op fra den nederste kant og et punkt op fra det midterste, har vi et nyt par som på tilsvarende måde interfererer destruktivt i retningen θ . På den måde kan vi danne par af de uendeligt mange punktkilder og konstatere, at der samlet set er destruktiv interferens i retningen givet ved vinklen θ .

Af formlen kan man se fysikken bag Heisenbergs argument for, at det kræver en foton med kort bølgelængde at bestemme elektronens position med stor nøjagtighed. Vinklen til det første minimum afhænger af bølgelængden og det kræver derfor en kort bølgelængde at gøre toppen smal, og på den måde at kende positionen med størst præcision.

Hvis vi nu springer fra bølgebilledet og betragter fotonen som en partikel, lokaliserer spalten fotonen i én retning (lodret). Det er netop i den samme retning, at impulsen bliver tilsvarende usikker. Størrelsen på usikkerheden i fotonens position Δx , er lig med D .



Figur 3. Impulsen \vec{p} er vandret før spalteåbningen (ikke vist) og den maksimale udbredning af impulsen efter spalteåbningen \vec{p}' . Der gælder at $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$. Usikkerheden i impulsen Δp_{\perp} tages som impuls-spredningen i den lodrette retning \vec{p}'_x (samme retning som spaltens bredde D).

Ved indgangen til spalten er fotonens impuls vandret \vec{p} , men efter spalten er impulsen bredt ud og den maksimale udbredning er vist med vektoren \vec{p}' , som illustreret på figur 2.

I det følgende bruger vi den tværgående impuls-spredning Δp_{\perp} (projektion på den lodrette akse), da det er denne komponent, der kobler spaltebredden Δx til spredningen efter spalten. Vi lader derfor $\Delta p \equiv \Delta p_{\perp}$. Geometrisk fås:

$$\sin(\theta) = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{\Delta p}{p}$$

hvor p er impulsen inden spalten.

Vi skal nu benytte de to formler til at vurdere størrelsen $\Delta x \cdot \Delta p$.

Først omskrives udtrykket fra bølgebilledet hvor vi anvender at $\Delta x = D$:

$$\sin(\theta) = \frac{\lambda}{D} \Rightarrow D = \frac{\lambda}{\sin(\theta)} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{\sin(\theta)}$$

Fra partikelbilledet og fotonens impuls $p = \frac{h}{\lambda}$, har vi:

$$\sin(\theta) = \frac{\Delta p}{p} \Rightarrow \Delta p = p \cdot \sin(\theta) = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin(\theta)$$

Deraf får vi:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\lambda}{\sin(\theta)} \cdot \frac{h}{\lambda} \cdot \sin(\theta) = h$$

Heisenberg gav i 1927 en eksplicit beregning, der viste, at $\Delta x \Delta p$ er af størrelsesorden h for konkrete tilstande, men den generelle ulighedsformulering $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ blev først givet senere.

Dette forsøg kan knyttes til løsningerne af Schrödingerligningen for partikel-i-en-boks-modellen, som beskrevet i opgaver fra Institut for Fysik og Astronomi, Aarhus Universitet⁴. Ved at anvende Heisenbergs usikkerhedsrelation kan man argumentere for, at en begrænsning af positionen Δx i en kvantebrønd medfører en nedre grænse for partiklens impuls og dermed for dens kinetiske energi. Dette giver et estimat af nulpunktenergien og viser den korrekte afhængighed af boksens størrelse, mens den eksakte værdi findes ved løsning af Schrödingerligningen.

⁴ [Introduktion til kvantemekanik](#)

Forsøg

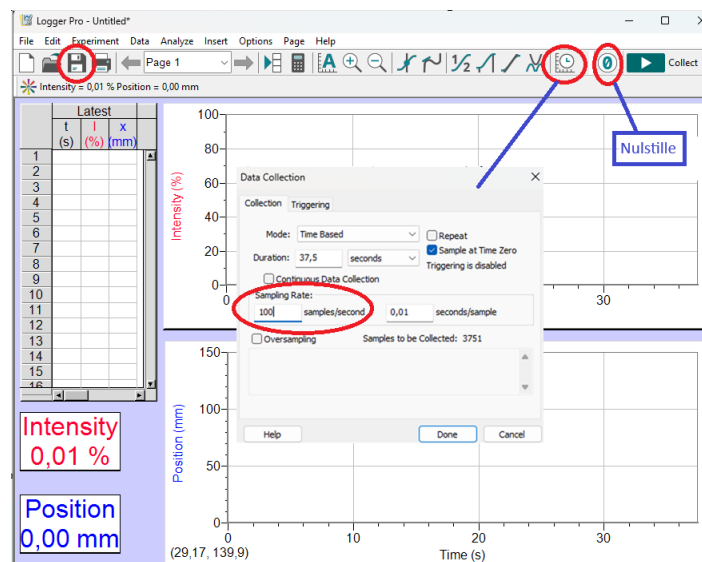
Forsøget udføres med en diffraktions apparat fra Vernier⁵.

Sikkerhed

Se aldrig direkte ind i en laserstråle. Dette gælder alle lasere – også ved lav effekt.

Opstilling

1. Monter laseren i den ene ende af skinnen, så den peger langs skinnen. Tilslut strømforsyningen, men lad laseren være slukket.
2. Monter apparatet med gittere ca. 10 cm fra laseren med den reflekterende side vendt mod laseren.
3. Monter den højfølsomme lyssensor og den lineære positionssensor i den modsatte ende af skinnen, med lyssensoren vendt mod spalten.
4. Aflæs på skinnen afstanden mellem gitter og lyssensoren – den kaldes L. (hint: flyt på de to apparater så det bliver et "pænt" tal).
5. Tag gitterne ud og tænd laseren. Benyt de to skruer bag på laseren til forsigtigt at justere strålen, så den rammer midt i spalten i lyssensoren.
6. Indstil spalteholderen til en **enkeltspalte** og gentag denne justering.
7. Gentag punkt 6. hver gang spalten ændres.
8. Tilslut Lyssensor og skinnen den sidder på, til en LabQuest mini. Tilslut denne til din computer.
9. Start Logger Pro.



10. Indstil Logger Pro som på billedet herover.
11. Man kan indstille størrelsen af åbningen på lyssensoren – se næste afsnit.

⁵ [Vernier Diffraction Apparatus.](#)

Udførelse

Selvom opstillingen nu burde være indstillet korrekt, brug lidt tid på at lære opstillingen at kende, ved at trykke "Collect" og se hvad der sker når du bevæger skinnen med lyssensoren.

Bemærk:

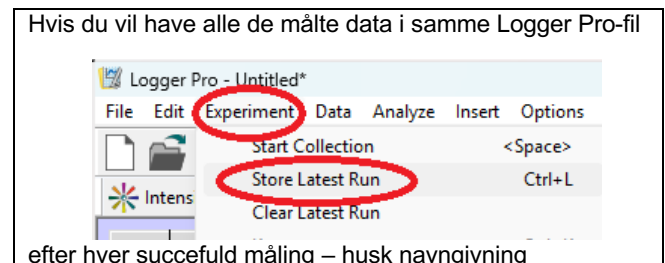
- Man kan nulstille med "Ø" – indikeret på billedet på forrige side – den nulstiller begge sensorer.
- Du kan autoskalere med "A".
- Hvis intensiteten er for høj eller for lav, indstil lyssensorens følsomhed ved at vælge (1,10,100) på knappen på lyssensoren og/eller ændre på åbningen.
- Graferne viser intensitet og position som funktion af tiden. Hvis du vil se intensiteten som funktion af positionen, dobbelt-klik på x-aksetitlen.

Når du er fortrolig med opstillingen, kan du gå videre og begynde at opsamle data.

Du skal foretage målinger af diffraktionsmønstret fra:

4 forskellige enkeltspalter med 2 forskellige lasere.

$$\lambda_{rød} = 635 \pm 5 \text{ nm} \quad \text{og} \quad \lambda_{grøn} = 520 \pm 1 \text{ nm}$$



Databehandling

For hver bølgelængde, opstil nedenstående skema i Logger Pro eller et andet regneark du er fortrolig med.

Målt			Beregning			
L(mm)	D(mm)	w(mm)	θ	$\frac{1}{\sin(\theta)}$	Δp	$\frac{1}{\Delta p}$

Af figur 2 (a) kan du se at:

- L er afstanden mellem gitter og lyssensor i mm.
- D er bredden af spalten i mm.
- w er afstanden mellem de to første minima i diffraktionsmønstret i mm.

Benyt forsøgsopstillingens geometri til at beregne θ :
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{w/2}{L}\right)$$

Benyt den fundne vinkel til at beregne Δp :
$$\Delta p = \frac{h}{\lambda} \cdot \sin(\theta), \quad h = 6,6260715 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Beregn resten af søjlerne.

1. Undersøg den klassiske diffraktion ved at afbilde D som funktion af $\frac{1}{\sin(\theta)}$ og foretag lineær regression i forventningen om at se:

$$D = \frac{\lambda}{\sin(\theta)} = \lambda \cdot \frac{1}{\sin(\theta)}$$

2. Undersøg Heisenbergs billede, ved at afbilde D som funktion af $\frac{1}{\Delta p}$ og foretag lineær regression i forventning om at se:

$$\Delta x \cdot \Delta p = h \quad \Rightarrow \quad D = h \cdot \frac{1}{\Delta p}, \quad \text{da } \Delta x = D$$

Du kan udføre yderligere databehandling ved at studere teorien om fysikken bag interferens og diffraktion i kapitel 14 i MIT-kurset [Visualizing Electromagnetism](#).

Links:

Max Jammer (1974)

[The Philosophy of Quantum Mechanics](#)

Wiley, kapitel 3

Niels Bohr (1928)

[The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory](#)

Nature **121**, 580–590 (1928)

FysikLab Forsøgsvejledning



FKF - Institut for Fysik, Kemi og Farmaci

Bestemmelse af Plancks konstant med LED

Brian Skov Sørensen (januar 2026)¹

¹[This work is licensed under CC BY 4.0.](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

Fysikken

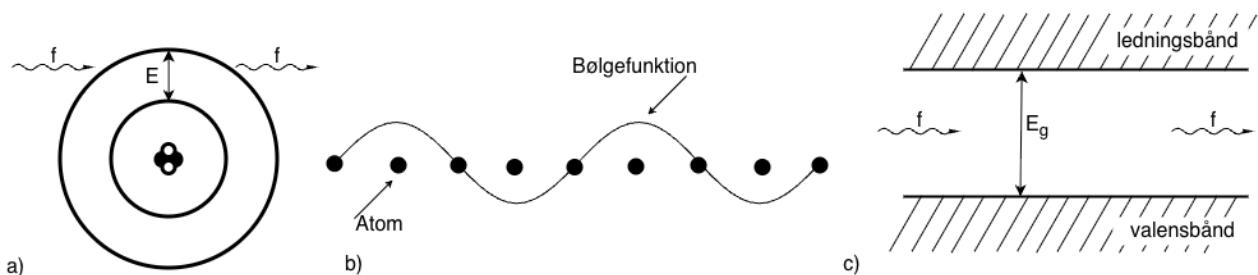
Elektronernes energiniveauer i et atom er kvantiserede. Elektronerne kan ændre energiniveau ved emission eller absorption af en foton, hvor fotonens energi svarer præcis til energiforskellen mellem to energiniveauer. Fotonens energi er givet ved formlen:

$$E = h \cdot f$$

hvor f er fotonens frekvens og $h = 6,62607 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, er Plancks konstant.

Ved at undersøge, ved hvilke frekvenser et atom udsender eller absorberer fotoner, er det derfor muligt at bestemme elektronernes energiniveauer i atomet. Bohrs atommodel anvendes ofte til at illustrere dette, som vist på figur 1a.

Faste stoffer består af mange atomer, som ofte sidder i et regelmæssigt mønster, kaldet et krystalgitter. Selvom elektroner i faste stoffer opfører sig anderledes end i et enkelt atom, gælder stadig, at fotonens energi kan kobles til en energiforskel i materialet. Fotonens energi beregnes med samme formel som for atomet, men hænger her sammen med krystallens båndgab. Herunder følger en kort beskrivelse af fænomenet.



Figur 1. a) Bohrs atommodel, $E = hf$. b) Stående bølge. c) Båndgab i en halvleder, $E_g = hf$.

I et krystal sidder atomerne i et periodisk gitter og som et simpelt billede i én-dimension, kan man forestille sig at de sidder som perler på en snor. Afstanden mellem nabatomer er typisk et par ångstrøm (Å) og atomernes størrelse er af samme størrelsesorden. Hvis vi tænker at vi putter en elektron ind i dette gitter, som en lille ladet kugle, ville den blive kraftigt påvirket og meget ofte spredt af de mange positive ioner i gitteret, og det vil være svært at forklare, at man kan lede en strøm af elektroner igennem krystallen.

Når elektroner alligevel kan bevæge sig let gennem nogle krystaller, kan det forklares med kvantemekanik. Kvantemekanisk beskrives elektronen ved en bølgefunktion - den har bølgenatur. I et regelmæssigt, periodisk gitter viser kvantemekaniske beregninger, at elektronens bølgenatur medfører, at der dannes stationære energitilstande. De kan sammenlignes med stående bølger, som illustreret på figur 1b. De stationære (stående) bølgetilstande findes kun for bestemte energier²; i et krystal ligger disse energier så tæt, at de danner energibånd hvor elektronen kan være, adskilt af et båndgab, hvor den ikke kan være. De to vigtigste bånd kaldes valensbåndet og ledningsbåndet og er illustreret på figur 1c.

² At kun bestemte stationære tilstande er mulige, kan illustreres med stående bølger på en snor. De svarer til bestemte frekvenser og dermed bestemte energier i den kvantemekaniske beskrivelse.

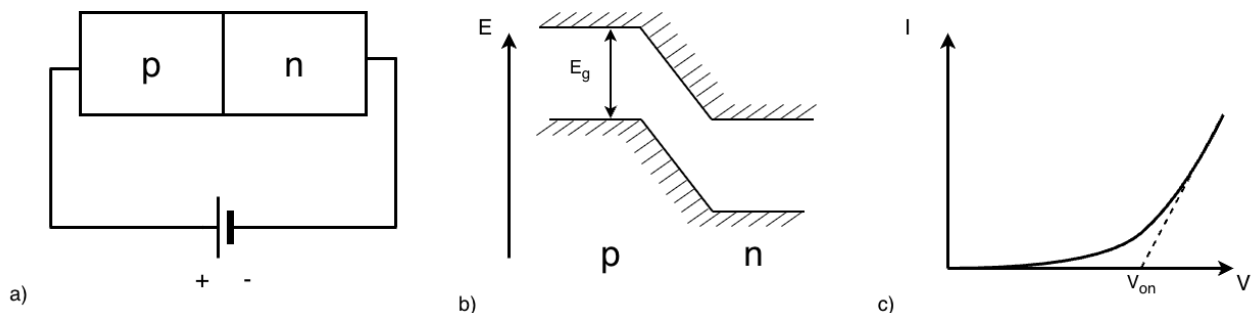
Ved at kombinere nærliggende stationære tilstande kan man skabe en bølgepakke, der beskriver elektronens bevægelse gennem krystallen, som var det en næsten fri partikel.

Halvledere er en type krystaller med et båndgab, og de indgår i stort set alle elektroniske komponenter. I dette forsøg skal I arbejde med lysdioder (LED'er) med forskellige båndgab, til at bestemme størrelsen af Plancks konstant.

Teori

En LED er et halvledermateriale, hvori der er skabt et grænselag i midten. Grænselaget skyldes, at ganske få atomer i halvledermaterialet er erstattet med fremmede atomer. To forskellige slags, én på hver sin side³. I praksis er det i omegnen af 1 ud af 1.000.000 atomer der bliver erstattet.

Fysikken der i detalje beskriver, hvad der sker i denne såkaldte pn-overgang i en LED, møder man på universitetsniveau. Men resultatet er illustreret herunder, hvor en LED er sat ind i et elektrisk kredsløb.



Figur 2. a) En LED illustreret ved en pn-overgang i et elektrisk kredsløb. b) Halvlederes båndgab i grænselaget i pn-overgangen. c) Strøm (I) som funktion af spænding (V) for en pn-overgang i fremadrettet retning. V_{on} findes ved at ekstrapolere den lineære del til skæring med V -aksen.

I elektronernes tur rundt i det elektriske kredsløb fra – til +, møder de en barriere i grænselaget mellem n og p, og der kan derfor ikke løbe nogen strøm af betydning (figur 2b). Men skruer man op for spændingen fra batteriet, sænker man barrieren, og der begynder at løbe en strøm.

Spændingen V_{on} der skal til for at der løber en strøm, svarer til båndgabets størrelse E_g .

Sammenhængen er givet ved:

$$e \cdot V_{on} = E_g + E_{tab}$$

e er elektronens ladning og E_{tab} beskriver den energi der går tabt i LED'en.

Når elektronen nu passerer grænselaget i pn-overgangen, vil den springe fra ledningsbåndet ned i valensbåndet. Ved dette spring i energi udsendes en foton med frekvensen:

$$E_g = h \cdot f$$

³ [The PN Junction. How Diodes Work? – YouTube.](#)

Sætter man disse to formler sammen, får man denne ligning:

$$e \cdot V_{on} - E_{tab} = h \cdot f$$

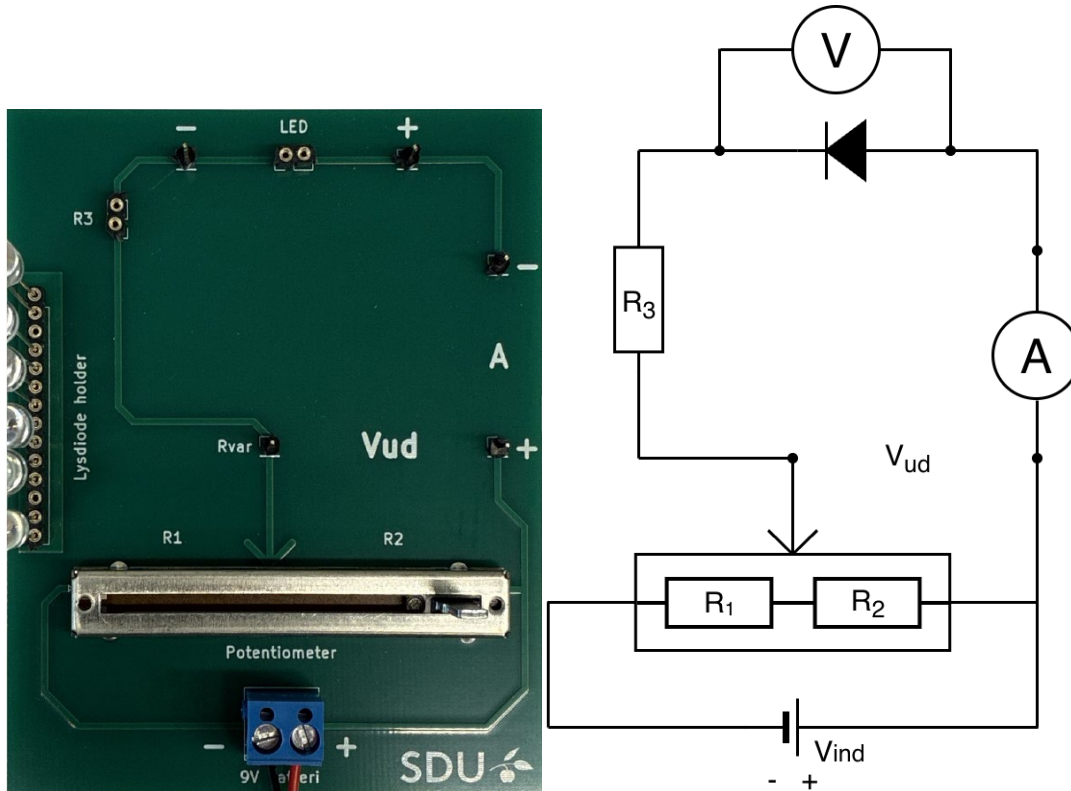
$$V_{on} = \frac{h}{e} \cdot f + \frac{E_{tab}}{e}$$

Plancks konstant indgår altså i proportionalitetskonstanten mellem spændingen (V_{on}), hvor der begynder at løbe en strøm og LEDen begynder at lyse, og frekvensen af det udsendte lys.

Det elektriske kredsløb

Dette er en gennemgang af det elektriske kredsløb som I arbejder med.

I skal anvende et multimeter, to ledninger og to "gribekløer".



Figur 3. Printpladen med det elektriske kredsløb til bestemmelse af h og diagrammet af det. Volt- og amperemeter er vist, der hvor de skal tilsluttes.

På figur 3 er vist et billede af den printplade i skal arbejde med, sammen med et diagram af det elektriske kredsløb på printet. I det følgende bliver I guidet igennem dets opbygning. Vent med at tilslutte delene til der står at I skal gøre det

LED som skal undersøges indsættes øverst, med det længste ben ved +.

1. Der er indsat en modstand R_3 i kredsløbet, for at strømmen gennem LEDen ikke skal blive for høj og dermed brænder den af. Bestem størrelsen af denne såkaldte formodstand med ohmmeteret.

A viser hvor amperemetret skal sættes på under forsøget.

Nederst sættes et 9V batteri på.

For at regulere spændingen over LEDen er der indsat et skydepotentiometer mellem 9V- batteriet og formodstanden/LEDen.

Skydepotentiometeret er en spændingsdeler der gør det muligt at variere spændingen V_{ud} mellem 9V og 0V. På næste side følger hvordan.

2. Skydepotentiometret kan betragtes som et lille separat kredsløb som består af to modstande i serie. R_1 og R_2 .

Ohms lov giver at strømmen i det lille kredsløb er:

$$I = \frac{V_{ind}}{R_1 + R_2}$$

Anvender vi Ohms lov på modstanden R_2 igen, må spændingsfaldet V_{ud} over modstanden R_2 givet ved:

$$V_{ud} = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_{ind}$$

Ved at skubbe skydepotentiometret mod højre gør du R_1 større og R_2 mindre.

- Bestem $R_1 + R_2$ for skydepotentiometret med ohmmetret på de to skruer nederst. Hvad sker der når i ændrer på potentiometret?
- Undersøg om R_1 opfører sig som forventet ved at måle modstanden mellem R_{var} og den venstre skrue (-).
- Undersøg om R_2 opfører sig som forventet ved at måle modstanden mellem + under amperemetret og den højre skrue (+).
- Sæt et 9V batteri på og undersøg om V_{ud} opfører sig som forventet.

Forsøg

Forsøget er delt op i fire dele og har til formål at bestemme proportionalitetskonstanten i udtrykket:

$$V_{on} = \frac{h}{e} \cdot f + \frac{E_{tab}}{e}$$

Bestemme bølgelængden og beregne frekvensen f , af lyset fra alle LED'er.



- Lave IV-karakteristikker for alle LED'er.
- Bestem V_{on} for LED'er.
- Bestemme h/e ved lineær regression ud fra (f, V_{on}) plot.

Lav følgende tabel i Logger Pro:

Bølgelængde λ (m)	Frekvens f (1/s)	V_{on}
---------------------------	--------------------	----------

1. Bestemme bølgelængden og beregne frekvensen f , af lyset fra alle LED'er.
 - a. Tilslut spektrometret til computeren via USB og skru lyslederkablet fast.
 - b. Start Logger Pro og klargør sensoren ved at vælge:

Experiment → *Set Up Sensors* → *Spectrometer* og vælg *Intensitet*

Skru op for LEDen til den lyser svagt og tryk Opsaml og Stop. Benyt  til at autoskalere og til  at bestemme den dominerende bølgelængde. Beregn frekvensen.

2. Lave IV-karakteristikker for alle LED'er.
 - a. Åben appen: graphicalanalysis.app og vælg "Sensor data opsamling"
 - b. Tænd for Vernier GoDirect voltmeter og amperemeter.
 - c. Vælg "Trådløs" og tilslut de to apparater, én ad gangen.

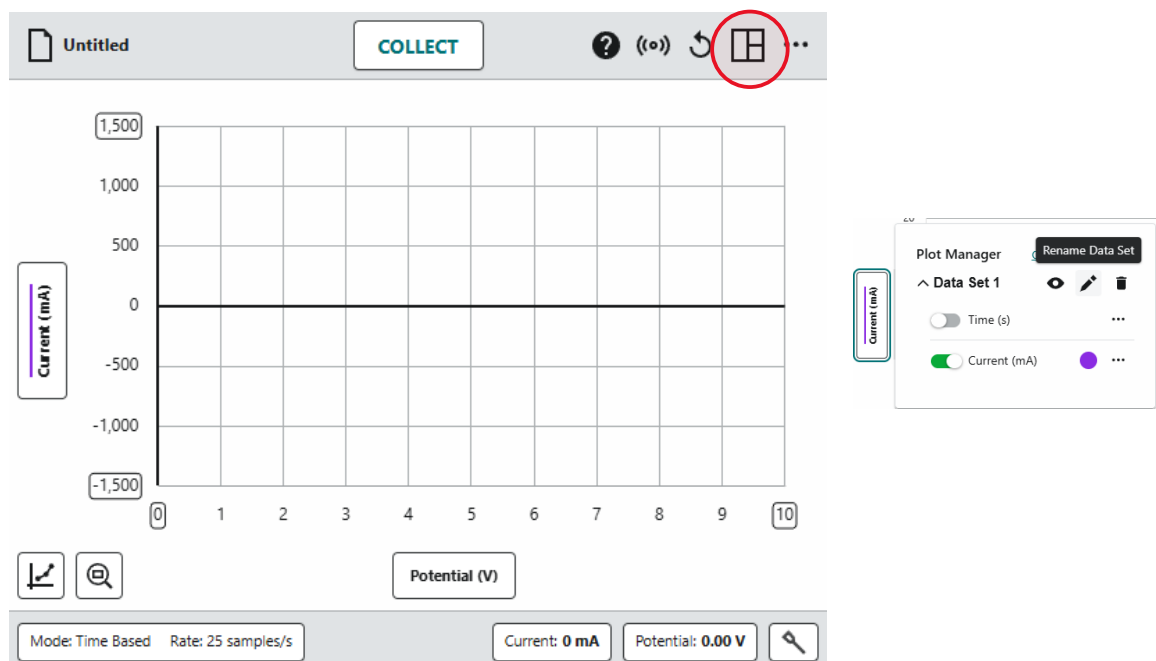
Nu ser vinduet næsten ud som på figur 4. Klik på menuen vist med en rød cirkel og vælg "1 Graf".

Alle firkanter kan klikkes på.


- d. Indstil alt, så det viser det samme som på figur 4 – husk at "zero" strøm og spænding.

Målingerne udføres ved at:

- e. Tryk "collect" og skub potentiometeret fra slukket til tændt og "stop" opsamlingen.
- f. Navngiv med LEDens bølgelængde som vist i figur 4 til højre.
- g. Skift diode og gentag.
- h. Gem som.



Figur 4. Arbejdsvinduet i Graphical Analyser.

3. Bestemme V_{on} for LED'er.
 - a. Eksporter dine data fra Graphical Analysis til CVS-format.
 - b. Opret en ny LoggerPro-fil og importér dem.
 - c. I et graf-vindue vælg strøm på x-aksen og spænding på y-aksen.
 - d. Foretag lineær regression med  og indstil grænserne [, og], så I opnår den bedst mulige lineære sammenhæng som illustreret i figur 1c.
 - e. V_{on} aflæses som skæring med y-aksen.
 - f. Indtast i skemaet i den første LoggerPro-fil.

4. Bestemme h/e ved lineær regression ud fra (f, V_{on}) plot.
 - a. Afbild V_{on} (volt) op ad y-aksen og f (1/s) hen ad x-aksen.
 - b. Foretag lineær regression og vurdér regressionen.
 - c. Bestem Plancks konstant h ud fra hældningskoefficienten og bestem den procentvise afvigelse fra den teoretiske størrelse.
 - d. Bestem E_{tab} .

Links:

Halvlederfysik teori (tekst og video) - 2. års introkursus SDU <https://zenodo.org/records/7560889>

Halvlederfysik teori OpenStax: [9: Condensed Matter Physics](#)

Veritasium – [How does a transistor work?](#)

SRP:

Dansk/Engelsk/Fysik: Kvantemekanikken i fiktion, kvantemekanik og formidling.

Filosofi/Fysik: Kvantemekanik og videnskabsfilosofi.

Engelsk/Fysik: Copenhagen

FysikLab Forsøgsvejledning



FKF - Institut for Fysik, Kemi og Farmaci

Fotoelektrisk effekt

Plancks konstant

Klaus Andresen (2020)^{1 2}

¹ Revideret: Brian Skov Sørensen (januar 2026).

² [This work is licensed under CC BY 4.0.](#)

Introduktion

Emission og absorption af lys blev i starten af 1900-tallet undersøgt af den tyske fysiker Max Planck. Da Planck forsøgte at formulere en teori, som kunne forklare den spektrale fordeling af lys udsendt fra et sort legeme, baseret på en klassisk bølgemodel, stødte han på store vanskeligheder. Rayleigh-Jeans-loven forudsagde, at mængden af lys, der udsendes fra et sort legeme, ville gå mod uendelig, når bølgelængden nærmede sig nul, hvorimod forsøg viste, at mængden af lys nærmede sig nul. Denne uoverensstemmelse med den klassiske fysik er kendt som den ultraviolette katastrofe. Ligeledes viste eksperimentelle resultater, at den maksimale intensitet af lys udsendt fra varme legemer også afveg fra den klassiske forudsigelse formuleret i Wiens lov. Planck forkastede derfor de klassiske teorier og udviklede en bedre teori til forklaring af fænomenerne. Heri indgik en universal konstant, h , kaldet Plancks konstant. Det viste sig, at lysets energi er proportional med dets frekvens, og at proportionalitetskonstanten netop er Plancks konstant. Planck offentliggjorde sin teori i 1901.

Plancks konstant har værdien: $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Max Planck fik Nobelprisen for sine resultater i 1918. Se følgende link:

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1918/summary/>

Følgende link er Plancks forelæsning i forbindelse med uddelingen af Nobelprisen. Her fortæller han om sin teori:

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1918/planck/speech/>

Det er nu over 100 år siden, at Planck offentliggjorde sin teori og i forbindelse med 100-året skrev den danske professor, Helge Kragh, en artikel om Planck, hans teori og betydningen af den. Artiklen kan læses her:

https://courses.lsa.umich.edu/krasny/wp-content/uploads/sites/202/2025/06/math156_article_planck.pdf

Teori

Ideen i det følgende eksperiment er at belyse en passende katode med lys fra en kviksølvlampe. Fotonerne fra lampen vil løsrive elektroner fra katoden. Dette fænomen kaldes for den fotoelektriske effekt. Elektronerne vil efter løsrivelsen have en bestemt kinetisk energi, som afhænger af fotonenergien. Plottes elektronernes kinetiske energier som funktion af fotonfrekvenserne, vil vi få en ret linje med hældning h .

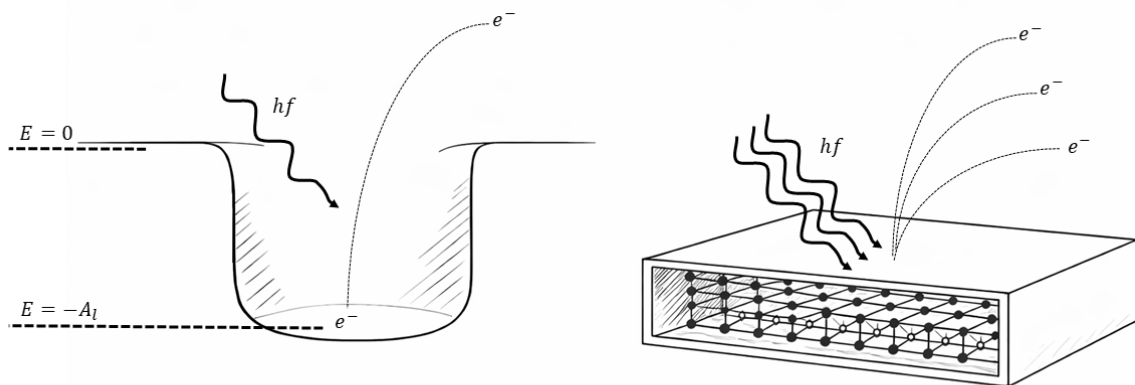
Den fotoelektriske effekt blev først observeret af H. Hertz (1887), som fandt at ultraviolet lys kunne påvirke udladning mellem elektroder. Senere udførte P. Lenard (ca. 1900–1902) kvantitative undersøgelser og viste bl.a., at de udsendte elektroners maksimale energi hænger sammen med lysets frekvens og ikke kun dets intensitet. I 1905 gav A. Einstein forklaringen ved at antage, at lys kan opfattes som kvanta (fotoner) med energi:

$$E_{foton} = h \cdot f$$

Einsteins forudsigelse, som vil blive udledt nedenfor, blev senere testet meget præcist af R. Millikan (ca. 1914–1916), som bekræftede den lineære sammenhæng og bestemte Plancks konstant ud fra hældningen.

Når elektronerne i katoden absorberer en foton, vil den blive løsrevet, hvis fotonens energi overstiger det løsriveresarbejde, A_L der er for en elektron i metallet. Efterfølgende vil elektronen have en kinetisk energi, E_{kin} , der er givet ved:

$$E_{kin} = E_{foton} - A_L = h \cdot f - A_L$$



SDU

Fotoelektrisk effekt illustreret: Foton absorberes og elektronerne i metallet løsriveres.

De løsrevne elektroner vil bevæge sig hen mod anoden og derfor give anledning til en elektrisk strøm. Ved at påføre et modsatrettet potentiale mellem anoden og katoden kan elektronstrømmen stoppes og elektronernes maksimale kinetiske energi kan bestemmes. Det minimale potentiale, der skal til for netop at stoppe elektronstrømmen kaldes stoppotentialet, V_{stop} og kan sættes lig elektronernes kinetiske energi.

Dette giver anledning til følgende udtryk:

$$E_{kin} = e \cdot V_{stop}$$

hvor V_{stop} er stoppotentialets styrke målt i volt og e er elementarladningen. Indsættes dette i den fotoelektriske ligning fås følgende:

$$e \cdot V_{stop} = h \cdot f - A_L$$

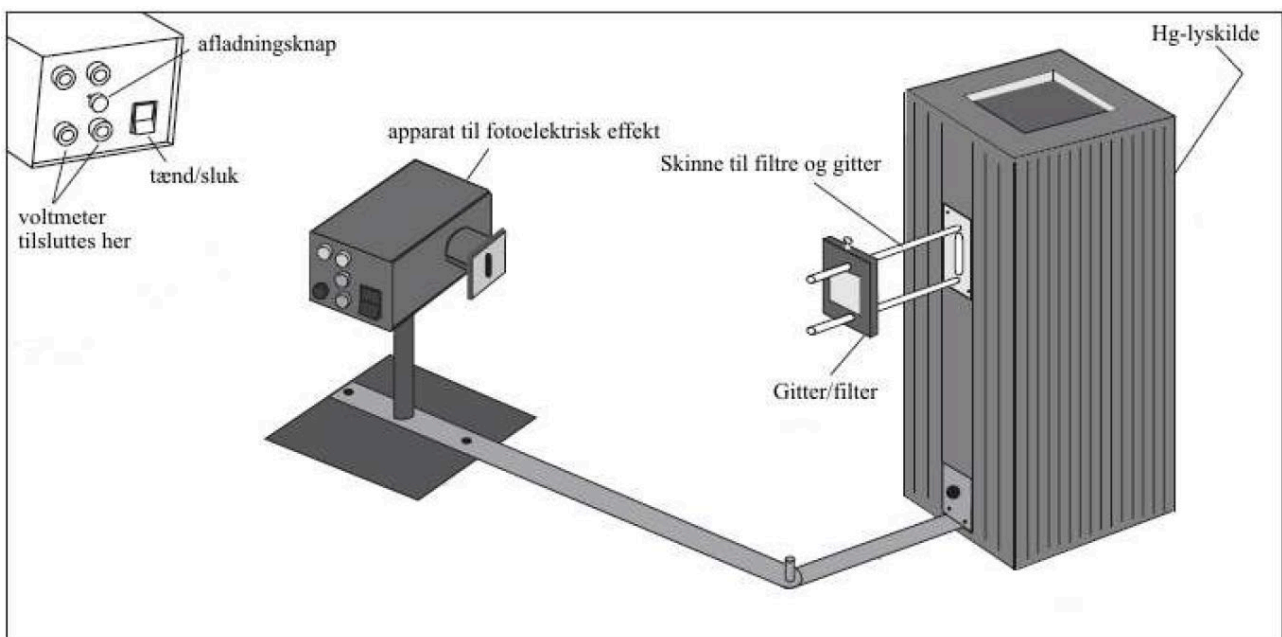
På det apparatur vi anvender i øvelsen, kan vi aflæse stoppotentialet V_{stop} direkte og dividerer vi igennem med e på begge sider af lighedstegnet, får vi en direkte relation mellem stoppotentialet, V_{stop} , og fotonfrekvensen, f :

$$V_{stop} = \frac{h}{e} \cdot f - \frac{A_L}{e}$$

Dette er den centrale ligning for øvelsen til at bestemme h .

Klargøring og brug af apparatur

På figuren nedenfor ses opstillingen af apparaturet.

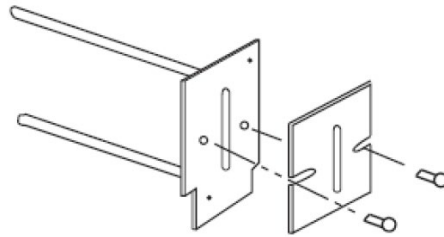


Følgende apparatur skal bruges:

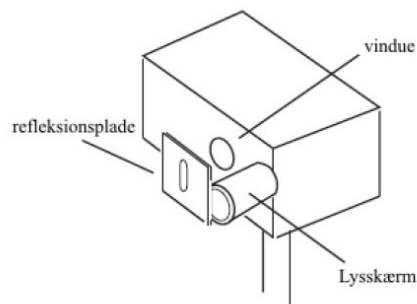
- Hg-lyskilde
- Apparat til fotoelektrisk effekt
- Et gitter og to farvefiltre (Orange og grønt)
- Et multimeter

Opstil apparaturet som vist på figuren ovenfor. Vær herved opmærksom på nedenstående punkter:

1. Sørg for at skinnen til gitter og filtre er påsat ordentligt. Skrueene må ikke overdrejes, men strammes kun med fingrene.
2. Gitteret sættes fast på skinnen ved at stramme skruen let med fingrene. Vær her opmærksom på at gitteret er slebet på en sådan måde, at lysintensiteten af det afbøjede lys kun er maksimal gennem den ene side af gitteret. Eventuelt vendes gitteret under forsøget.
3. Tænd for kviksøvlampen og lad den varme op i fem minutter.
4. Bag på skinnen sidder en plade, som kan justeres fra side til side. Den sidder højt sandsynligt som den skal, men hvis ikke, så justér pladen, så lyset rammer præcist midt på gitteret.



5. Tilslut et multimeter sat til at måle DC spænding til det fotoelektrisk apparat.
6. Placér nu det fotoelektriske apparat nøjagtigt foran Hg-lampen og fokusér lyset på apparatets reflektionsplade ved at forskyde gitteret frem og tilbage langs skinnen.



7. Rul lysskærmen til side og roter hele apparatet så lysets centrerer på fotodioden inde i apparatet. Skruen på basen af apparatet strammes herefter let med fingrene.
8. Gitteret justeres nu igen, så lyset fokuseres på fotodioden inde i apparatet. Herefter strammes skruen på gitteret let med fingrene.

9. Tænd nu for apparatet og rotér hele apparatet inklusive basen indtil en af de farvede linjer fra 1. orden præcist rammer reflektionspladen midt på. Rotér herefter kun selve apparatet indtil den samme linie også rammer fotodioden inde i apparatet. Se figuren nedenfor. Til sidst rulles lysskærmen på plads igen.

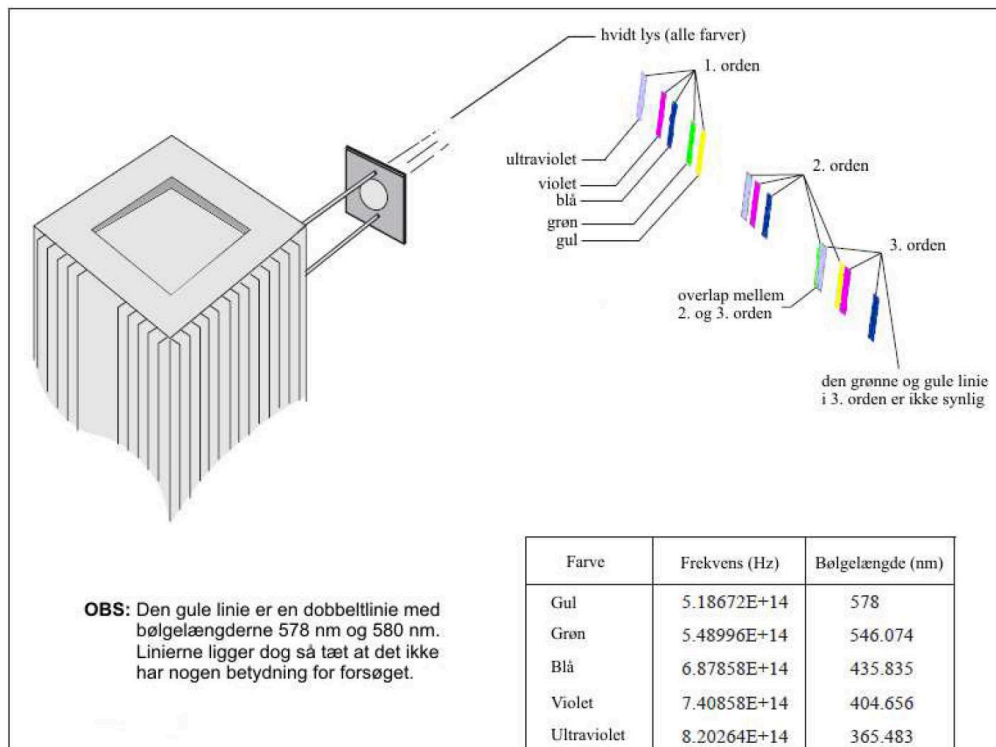
Den hvide reflektionsplade er lavet af et fluorescerende materiale, der gør, at den ultraviolette linie kan ses som en blå linie. Ligeledes vil den violette linie også blive mere blå. Liniernes rigtige farver kan ses, hvis der holdes et stykke ikke-fluorescerende op foran reflektionspladen.

NÅR DER UDFØRES FORSØG, ER DET VIGTIGT, AT KUN ÉN LINIE RAMMER IND PÅ FOTODIODEN.

DER MÅ IKKE VÆRE OVERLAP.

Når den gule linje eller den grønne linje bruges, er det nødvendigt at filtrere alt andet lys fra end netop disse to bølgelængder. Dette gøres ved at placere det orange filter, hhv. det grønne, på reflektionspladen foran vinduet i apparatet.

På billedet herunder kan man se hvilke, farver og diffraktionsordner man kan forvente at se. Bemærk hvorfor det især er nødvendigt at have filter på, når man måler på 2. orden.



Forsøg

Intensiteten af en lysbølge er i den klassiske bølgebeskrivelse givet ved bølgens amplitude (mere præcist amplituden i anden). Ifølge Einsteins kvantefortolkning skal lysets intensitet derimod forstås som et udtryk for antallet af fotoner pr. sekund, mens lysets frekvens afgør, hvor meget energi den enkelte foton bærer.

Opskriv følgende skema i LoggerPro.

Farve	Bølgelængde (m)	Frekvens (Hz)	V_{stop} 1. orden (V)	Tid 1 (s)	V_{stop} 2. orden (V)	Tid 2 (s)
-------	-----------------	---------------	-------------------------	-----------	-------------------------	-----------

1. Indstil apparatet til den ønskede farve i den ønskede orden.

Efter **Tryk på afladningsknappen** vil potentialet stige indtil det når en konstant værdi – det kan tage tid.

2. Aflæs stoppotentialet for den pågældende farve V_{stop} .
3. Tryk på afladningsknappen igen, og mål tiden der går til potentialet igen når V_{stop} .
4. Skift farve.

Analyse

1. For hver orden, udfør lineær regression, bestem h og vurder resultatet.
2. Betragt udtrykket:

$$V_{stop} = \frac{h}{e} \cdot f - \frac{A_L}{e}$$

Når $V_{stop} = 0$, betyder det at metallet er på kanten af at frigive elektroner ved belysning.

Bestem den mindst mulige frekvens for fotoelektriske effekt (f_{cutoff}) og løsrivelsesarbejdet/arbejdsfunktionen (A_L) ud fra de lineære modeller.

3. Undersøg hvilket metal der kan være tale om.
4. Intensiteten af lyset for hver farve, er lavere i 2. ordens linjer end i 1. ordens linjer.
 - a. Beregn den procentvise afvigelse for hver farve, mellem V_{stop} for 1. og 2. orden.
 - b. Beregn den procentvise afvigelse for hver farve, mellem opladningstiderne 1. og 2. orden.

Diskuter resultatet og sammenhold dem med, hvad den klassiske bølgemodel og Einsteins kvantefortolkning forudsiger.

FysikLab Forsøgsvejledning



FKF - Institut for Fysik, Kemi og Farmaci

Dobbeltpalteforsøget med polarisering

Fra interferens til "quantum eraser"
– *en model for entanglement*

Brian Skov Sørensen (marts 2026)¹

¹ [This work is licensed under CC BY 4.0.](#)

Forsøget

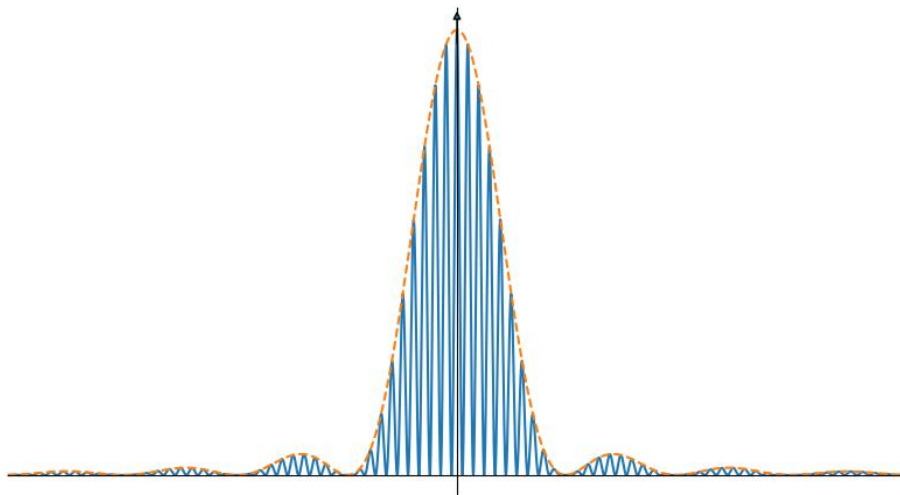
I forsøget belyses en dobbeltspalte med laserlys. Lyset passerer gennem to smalle åbninger (spalter) og rammer en skærm, hvor intensiteten registreres som funktion af positionen x .

Forsøget udføres i tre varianter:

- (1) Uden polarisationsfiltre (almindeligt dobbeltspalteforsøg).
- (2) Med to ortogonale polarisationsfiltre, ét foran hver spalte.
- (3) Som i (2), men med en ekstra polarisationsanalysator (quantum eraser).

Selv om laseren er en klassisk lyskilde, fortolkes forsøget kvantemekanisk ved at betragte én foton ad gangen. Det giver adgang til kvantemekaniske begreber som superposition og entanglement, som ellers ikke kan beskrives i en klassisk bølgemodel.

Herunder ses interferensmønstret fra det almindelige dobbeltspalteforsøg (1). Den stiplede linje viser den overordnede diffraktion fra de enkelte spalter, som interferensmønstret ligger inden for.



Kvantemekanisk beskrivelse og Dirac-notation

For at beskrive forsøget kvantemekanisk må vi identificere, hvilke kvantetilstande der er relevante for forsøgsopstillingen, og hvordan de kombineres.

Stien (which-path)

Efter dobbeltspalten findes der to klart adskilte muligheder:

- Fotonen er passeret gennem den venstre spalte.
- Fotonen er passeret gennem den højre spalte.

Disse muligheder beskrives ved to ortogonale tilstande²:

² Med betegnelserne $|0\rangle$ og $|1\rangle$ for de to mulige stier (spalter eller arme), gør denne notation det muligt at beskrive både dobbeltspalte-, Mach-Zehnder- og Michelson-interferometre inden for samme kvantemekaniske ramme.

$|0\rangle$ (venstre spalte), $|1\rangle$ (højre spalte)

Betegnelserne $|0\rangle$ og $|1\rangle$ refererer ikke til konkrete positioner i rummet, men til to gensidigt udelukkende kvantemekaniske alternativer. De er en abstraktion.

De udspænder et todimensionelt Hilbert-rum:

$$\mathcal{H}_{stl} = \text{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$$

Polariseringen

Fotonen har også en polarisationsfrihedsgrad. Vi indfører derfor:

$|V\rangle$ (vertikal polarisering), $|H\rangle$ (horisontal polarisering)

Disse udspænder Hilbert-rummet:

$$\mathcal{H}_{pol} = \text{span}\{|V\rangle, |H\rangle\}$$

Der gælder følgende regler for de to Hilbert-rum:

$$\langle 0 | 1 \rangle = \langle 1 | 0 \rangle = 0 \text{ og } \langle 0 | 0 \rangle = \langle 1 | 1 \rangle = 1$$

$$\langle V | H \rangle = \langle H | V \rangle = 0 \text{ og } \langle V | V \rangle = \langle H | H \rangle = 1$$

Position på skærmen og operatoren T

Positionen på skærmen beskrives ved tilstande som betegnes:

$$|x\rangle$$

Forbindelsen mellem en spaltetilstand og en position på skærmen beskrives af operatoren T , som repræsenterer fotonens udbredelse fra en spalte til skærmen og dens bidrag til amplituden på skærmen. Detaljer om den præcise form af T er, som du vil se, ikke nødvendige for at beskrive interferensen.

Amplituden for, at en foton der er gået gennem den venstre spalte og rammer skærmen i position x , skrives som:

$$\psi_0(x) = \langle x | T | 0 \rangle$$

Bemærk at man i Dirac-notationen skal læse udtryk fra højre mod venstre; først vælges en tilstand $|0\rangle$, derefter virker operatoren T , og til sidst foretages en måling ved projicering på en måletilstand $\langle x |$.

Tilsvarende for højre spalte:

$$\psi_1(x) = \langle x | T | 1 \rangle$$

Disse amplituder er komplekse tal, som indeholder både størrelse og fase.

Ikke-separable tilstande - entanglement

Før vi går videre med beregningerne for kvantetilstandene i de tre forsøg, skal vi kort stoppe op og se på hvordan entangled tilstande ser ud matematisk. Der bliver kun brugt det matematiske sprog, der skal til for at kunne regne på forsøget³.

I disse forsøg har vi to uafhængige sæt af kvantetilstande, sti $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ og polarisation $\{|V\rangle, |H\rangle\}$. En kvantetilstand opskrives ved at holde de to sæt separeret på hver side af tensorprodukt-symbolet \otimes .

En mulig kvantetilstand, der beskriver hele systemet med sti og polarisation, kunne være denne her:

$$|\psi_c\rangle = |0\rangle \otimes |H\rangle = |0\rangle |H\rangle$$

Dette er kvantetilstanden for en foton der går gennem venstre spalte og er horisontalt polariseret. Her er sti og polarisering blot "sat sammen" af to separable tilstande. Sådanne tilstande kaldes for produkt-tilstande. Måling af den ene kvantetilstand giver ingen information om den anden.

En entangled tilstand er derimod en tilstand, som ikke kan skrives som et enkelt tensorprodukt, tilstanden er ikke-separabel. Et eksempel er:

$$|\psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |V\rangle + |1\rangle \otimes |H\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle |V\rangle + |1\rangle |H\rangle)$$

Bemærk at sti $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ altid er på venstre side af \otimes og polarisation $\{|V\rangle, |H\rangle\}$ på højre.

Bemærk også, at det betyder, at hvis vi måler fotonen til at være i tilstanden $|0\rangle$ er den også polariseret vertikalt. Eller hvis man måler fotonens polarisering til at være $|H\rangle$, vil den have passeret igennem den højre spalte.

Alle de mulige produkt-tilstande for disse forsøg kan skrives som superposition af basistilstandene for $\mathcal{H}_{sti} \otimes \mathcal{H}_{pol}$, på følgende måde:

$$(\alpha_1 |0\rangle + \alpha_2 |1\rangle) \otimes (\beta_1 |V\rangle + \beta_2 |H\rangle) =$$

$$(\alpha_1 \beta_1 |0\rangle \otimes |V\rangle) + (\alpha_1 \beta_2 |0\rangle \otimes |H\rangle) + (\alpha_2 \beta_1 |1\rangle \otimes |V\rangle) + (\alpha_2 \beta_2 |1\rangle \otimes |H\rangle)$$

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ og β_2 er (komplekse) tal.

For $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ og $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ får vi tilstanden $|\psi_c\rangle = |0\rangle \otimes |H\rangle$.

³ For det grundlæggende om Bra-Ket notation, bølgefunktion, amplitude og sandsynlighed se det første kapitel i MIT – OpenCourseWare kurset "[Quantum Physics I](#)" og den tilhørende [youtube video](#).

Prøv selv at bestemme værdierne for $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ og β_2 til at danne $|\psi_E\rangle$. Hvis det ikke er muligt, er det fordi det ikke er en produkt-tilstand, men en entangled en. Hint: Sæt den generelle produkt-tilstand lig med $|\psi_D\rangle$ og sammenlign koefficienterne foran.

Med denne notation på plads kan vi nu beregne interferensmønstre og undersøge, hvordan entanglement påvirker sandsynlighedsfordelingerne på skærmen.

(1) Beregninger uden polarisationsfiltre – interferens

Antag, at fotonen før spalterne har en fast polarisering, $|p_0\rangle$. Den fremkommer som en linearkombination af $|V\rangle$ og $|H\rangle$. Hvilken, har ingen betydning her, da polariseringen ikke ændres i forsøget og ikke spiller nogen aktiv rolle.

Efter spalterne er tilstanden:

$$|\psi_{int}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |p_0\rangle$$

Amplituden ved skærmen for position x , fås ved først at anvende operatoren T for at komme frem til skærmen og derefter at projicere på tilstanden $|x\rangle$:

$$\begin{aligned} \psi_{int}(x) &= \langle x | T | \psi_{int} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | T | 0 \rangle + \langle x | T | 1 \rangle) \otimes |p_0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x) + \psi_1(x)) |p_0\rangle \end{aligned}$$

Husk at projektionen på $|x\rangle$ kun virker på sti-delen.

Sandsynligheden for at finde fotonen i x på skærmen er givet ved:

$$\begin{aligned} P_{int}(x) &= |\psi_{int}(x)|^2 = |\langle x | T | \psi_{int} \rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x) + \psi_1(x)) \right)^* \langle p_0 | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x) + \psi_1(x)) \right) | p_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (|\psi_0(x)|^2 + |\psi_1(x)|^2 + 2\text{Re}[\psi_0^*(x)\psi_1(x)]) \langle p_0 | p_0 \rangle \end{aligned}$$

$\langle p_0 | p_0 \rangle = 1$, da det er projektionen af $|p_0\rangle$ på $|p_0\rangle$ selv. Det sidste led er interferensledet som giver anledning til interferensmønstret.

(2) Beregninger med ortogonale polarisationsfiltre – entanglement

I forsøgsopstillingen indsætter vi nu:

- Vertikalt polarisationsfilter foran den venstre spalte.
- Horisontalt polarisationsfilter foran den højre spalte.

Tilstanden bliver derfor nu:

$$|\psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |V\rangle + |1\rangle \otimes |H\rangle)$$

Amplituden ved skærmen for position x , fås igen ved først at anvende operatoren T for at komme frem til skærmen og derefter at projicerer på tilstanden $|x\rangle$.

$$\begin{aligned} \psi_E(x) &= \langle x | T | \psi_E \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle x | T | 0 \rangle |V\rangle + \langle x | T | 1 \rangle |H\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x) |V\rangle + \psi_1(x) |H\rangle) \end{aligned}$$

Husk igen, at projektionen på $|x\rangle$ kun virker på sti-delen.

Sandsynligheden for at finde fotonen i x på skærmen, er givet ved:

$$\begin{aligned} P_E(x) &= |\psi_E(x)|^2 = |\langle x | T | \psi_E \rangle|^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x) \langle V| + \psi_1(x) \langle H|) \right)^* \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_0(x) |V\rangle + \psi_1(x) |H\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2} (|\psi_0(x)|^2 \langle V|V\rangle + |\psi_1(x)|^2 \langle H|H\rangle + \psi_0^*(x) \psi_1(x) \langle V|H\rangle + \psi_1^*(x) \psi_0(x) \langle H|V\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|\psi_0(x)|^2 + |\psi_1(x)|^2) \end{aligned}$$

Da $\langle V|H\rangle = \langle H|V\rangle = 0$ og $\langle V|V\rangle = \langle H|H\rangle = 1$, forsvinder interferensleddet.

Polariseringen fungerer her som which-path-information og ødelægger interferensen. Uddybende forklaring følger senere.

(3) Quantum eraser - projektion

Vi indsætter et polarisationsfilter (analysator) der er drejet 45° i forhold til basis $\{|V\rangle, |H\rangle\}$ efter dobbeltspalten:

$$|D\rangle = \frac{|V\rangle + |H\rangle}{\sqrt{2}}$$

Efter analysatoren ser vi kun de fotoner, der projiceres på $|D\rangle$, eller sagt på en anden måde, polarisationsfiltret tillader kun fotoner i tilstanden $|D\rangle$ at passere.

Tilstanden før analysatoren, men efter spalterne og de ortogonale polarisationsfiltre, er fotonens kvantetilstand (som i afsnit (2)):

$$|\psi_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |V\rangle + |1\rangle \otimes |H\rangle).$$

Når fotonen passerer analysatoren, projiceres tilstanden på $|D\rangle$ i polarisationsrummet og den projicerede sti-tilstand bliver:

$$\langle D | \psi_E \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \langle D | V\rangle + |1\rangle \langle D | H\rangle).$$

Braket'erne beregnes:

$$\begin{aligned} \langle D | V \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle V | V \rangle + \langle H | V \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \langle D | H \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle V | H \rangle + \langle H | H \rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

da $\langle V | H \rangle = \langle H | V \rangle = 0$ og $\langle V | V \rangle = \langle H | H \rangle = 1$.

Resultatet er:

$$\langle D | \psi_E \rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle).$$

Bemærk at denne tilstand ikke er normeret, idet normen er:

$$\langle \psi_E | D \rangle \langle D | \psi_E \rangle = \frac{1}{2}.$$

Dette er sandsynligheden for at fotonen er polariseret langs $|D\rangle$ - kun halvdelen af fotonerne passerer analysatoren.

Amplituden for først at måle polariseringen $|D\rangle$ og derefter finde en foton i position x på skærmen er:

$$\langle x | T | \langle D | \psi_E \rangle = \frac{1}{2} (\langle x | T | 0 \rangle + \langle x | T | 1 \rangle) = \frac{1}{2} (\psi_0(x) + \psi_1(x)).$$

Sandsynligheden for at finde fotonen i x på skærmen efter analysatoren er sat ind, er givet ved:

$$P_D(x) = |\langle x | T | \langle D | \psi_E \rangle|^2 = \frac{1}{4} (|\psi_0(x)|^2 + |\psi_1(x)|^2 + 2 \operatorname{Re}[\psi_0^*(x)\psi_1(x)]).$$

Her ses tydeligt, at interferensleddet er tilbage, og at $P_D(x) = \frac{1}{2} P_{int}(x)$ beregnet i (1). Faktoren $\frac{1}{2}$ skyldes at vi ved analysatoren kun udvælger den del af den entangled tilstand, der passer i analysatorens polarisationsretning (den ortogonale registreres ikke).

Dette quantum eraser-eksperimentet viser, at interferensen ikke forsvinder permanent ved entanglement. Ved at måle i en passende polarisationsbasis slettes which-path-informationen, og interferensen genskabes.

Entanglement?

Forsøget er en klassisk analogi, der skal tænkes som et enkeltfoton forsøg for at vi kan tale om en kvantemekanisk beskrivelse. Når dette spring er taget, hvad menes der så med entanglement? Vi skal se lidt på forskellen mellem matematisk- og fysisk entanglement. Der er nemlig fundamental forskel på det man kalder intra-partikel entanglement, som er entanglement mellem to frihedsgrader af samme partikel og inter-partikel entanglement mellem to partikler.

I kvantemekanikken anvendes begrebet superposition om et system der kan befinde sig i flere tilstande på samme tid. En elektron, lad os kalde den A, har to spin-tilstande og hvis man ikke har målt på den, siges den at være i en superposition af de to tilstande; spin-op og spin-ned. Tager man en anden elektron, lad os kalde den B, har den samme egenskab.

A og B er i dette tilfælde to adskilte systemer, som hver især kan beskrives ved deres egen kvantetilstand og deres egen bølgefunktion. De kan hver især være i superposition af deres egne spin-tilstande og kan matematisk beskrives ved en produkt-tilstand, som forklaret tidligere.

Hvis A og B derimod bliver entangled, betyder det, at hverken A eller B længere kan beskrives ved en selvstændig kvantetilstand. Det giver ikke længere mening at tale om superposition af spin-tilstande for de enkelte partikler. I stedet kan systemet kun beskrives ved en fælles kvantetilstand, som ikke kan beskrives matematisk ved en produkt-tilstand.

Hvis de to entangled spin-1/2 partikler nu fjernes (uendeligt) langt fra hinanden, og man efterfølgende foretager en spinmåling på det ene delsystem (A) og får spin-op, ved man, at delsystem B vil være spin-ned, hvis man måler dens spin. Det er ikke de enkelte partikler, men den fælles kvantetilstand, der bærer informationen. Dette er inter-partikel entanglement.

I dobbeltspalteforsøget er der ikke tale om to partikler, men én enkelt foton. Sendes fotoner gennem dobbeltspalten én efter én, opstår der et interferensmønster - ikke fordi de interfererer med hinanden, men fordi den enkelte foton kan beskrives som en superposition af de to mulige stier ($|0\rangle, |1\rangle$).

Når der indsættes ortogonale polarisationsfiltre foran spalterne, kobles fotonens sti til dens polarisering. Sti og polarisering kan nu ikke længere beskrives uafhængigt af hinanden, altså som en produkt-tilstand. Fotonens tilstand må i stedet beskrives ved en fælles kvantetilstand for de to delsystemer. At stien ikke længere kan beskrives ved en selvstændig superposition, ses ved, at interferensmønstret forsvinder.

Når de to delsystemer, sti og polarisering, er entangled, er det i princippet muligt at bestemme hvilken sti fotonen tog, ved at måle dens polarisation, og interferensen er derfor væk. Det er meget vigtigt at bemærke, at interferensen ikke forsvinder, fordi man aktivt måler hvilken sti fotonen tog, men fordi informationen om stien er tilgængelig.

I quantum eraser-opsætningen (3) fjernes which-path-informationen, som er kodet i polariseringen, ved en projektiv måling i en ny polarisationsbasis. Koblingen mellem sti og polarisering ophæves, og fotonen kan derfor nu igen beskrives som en superposition af de to mulige stier. Interferensen er genskabt.

Betragtet som et enkeltfoton-eksperiment illustrerer dobbeltspalteforsøget delayed choice i relation til komplementaritetsprincippet. Valget mellem interferens (bølge) og hvilken-vej-information (partikel) træffes efter, at fotonen har passeret dobbeltspalten. Forsøget realiserer imidlertid ikke fysisk kvante-entanglement.

Fysisk kvante-entanglement forudsætter, at der indgår to delsystemer, som kan adskilles og måles uafhængigt af hinanden, at der kan foretages uafhængige valg af måleopstilling for hvert delsystem, og at de målte udfald viser korrelationer mellem delsystemerne.

I dobbeltspalteforsøget er der derimod kun tale om én enkelt foton, hvor entanglement opstår mellem to frihedsgrader af samme partikel (sti og polarisering). De to delsystemer kan ikke adskilles og måles uafhængigt af hinanden, og forsøget illustrerer derfor kun den matematiske struktur af entanglement, men ikke dets fulde fysiske realisering. Det er et eksempel på intra-partikel entanglement.

I boksen på næste side ses hvordan to forskellige fysiske situationer kan beskrives ved samme matematiske struktur: I det ene tilfælde er entanglement knyttet til to rumligt adskilte partikler, mens det i dobbeltspalteforsøget opstår mellem to frihedsgrader af den samme foton.

En kvalitativ beskrivelse af fysisk kvante-entanglement, hvor der indgår adskilte delsystemer og korrelationer mellem måleudfald, kan findes i følgende gennemgang af et quantum eraser-eksperiment: <https://www.stonybrook.edu/laser/amarch/eraser>

To spin- $\frac{1}{2}$ -partikler	Dobbeltspalte med polarisering
<p>System: To partikler, A og B</p> <p>Delsystemer:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Partikel A (spin op/ned) • Partikel B (spin op/ned) <p>Separate kvantetilstande: Hvis de to partikler ikke er entangled, kan hver partikel beskrives ved sin egen kvantetilstand. Spinnene på A og B er da veldefinerede uafhængigt af hinanden.</p> <p>Entangled kvantetilstand: Når partiklernes spin er entangled, kan de ikke længere beskrives ved selvstændige kvantetilstande. Kun den fælles kvantetilstand for systemet er veldefineret.</p> <p>Måling: En måling af spin på partikel A projicerer den fælles kvantetilstand og fastlægger samtidig spinnene på partikel B.</p> <p>Fortolkning: Entanglement betyder her, at to rumligt adskilte partikler udgør ét samlet kvantesystem.</p>	<p>System: Én foton</p> <p>Delsystemer:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Sti (hvilken spalte fotonen passerer) • Polarisering (Vertikal/Horisontal) <p>Separate kvantetilstande: Hvis sti og polarisering ikke er entangled, kan sti-delsystemet beskrives ved en selvstændig kvantetilstand og fotonen kan da være i superposition af to stier. Interferens observeres.</p> <p>Entangled kvantetilstand: Når sti og polarisering er entangled, kan de ikke beskrives ved selvstændige kvantetilstande. Kun den fælles kvantetilstand for systemet er veldefineret.</p> <p>Måling: En måling af polariseringen projicerer den fælles kvantetilstand og fastlægger samtidig sti-tilstanden.</p> <p>Fortolkning: Entanglement opstår her mellem to frihedsgrader af samme partikel, ikke mellem to partikler.</p>

Mere om interferensleddet og den klassiske tolkning af forsøget

Dobbeltspalteforsøget med polarisering giver en konkret, eksperimentel realisering af den matematiske entangled-struktur og viser, hvordan denne direkte observerbare størrelse som interferens.

I forsøget er det ikke enkelt fotoner i superposition mellem de to stier der giver anledning til interferens. Den klassiske forklaring på at interferensen forsvinder når der indsættes polarisationsfiltre i spalterne er, at de elektriske (magnetiske) felter svinger vinkelret på hinanden og derfor ikke kan interferere.

Frem til nu er fotonens vej fra spalte til skærm kun beskrevet af operatoren T . Her skal vi se lidt nærmere på interferensleddet $2 \operatorname{Re}[\psi_0^*(x)\psi_1(x)]$.

$\psi_0(x)$ og $\psi_1(x)$ er komplekse tal, og kan derfor skrives som:

$$\psi_0(x) = A_0(x)e^{i\phi_0(x)} \quad \text{og} \quad \psi_1(x) = A_1(x)e^{i\phi_1(x)}$$

hvor $A_0(x) = |\psi_0(x)|$ og $A_1(x) = |\psi_1(x)|$ er de (reelle) amplituder, og $\phi_0(x), \phi_1(x)$ er faserne.

Dermed følger at:

$$\psi_0^*(x)\psi_1(x) = A_0(x)A_1(x)e^{-i\phi_0(x)}e^{i\phi_1(x)} = A_0(x)A_1(x)e^{i(\phi_1(x)-\phi_0(x))}$$

og derfor at:

$$2 \operatorname{Re}[\psi_0^*(x)\psi_1(x)] = 2A_0(x)A_1(x)\cos(\phi_1(x) - \phi_0(x))$$

Benytter vi dette bliver udtrykket for hele sandsynligheden:

$$\begin{aligned} P_{int}(x) &= |\psi_{int}(x)|^2 = |\langle x | T | \psi_{int} \rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x) + \psi_1(x)) \right)^* \left\langle p_0 \left| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0(x) + \psi_1(x)) \right) \right| p_0 \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} (|\psi_0(x)|^2 + |\psi_1(x)|^2 + 2 \operatorname{Re}[\psi_0^*(x)\psi_1(x)]) \langle p_0 | p_0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} (A_0(x)^2 + A_1(x)^2 + 2A_0(x)A_1(x)\cos(\phi_1(x) - \phi_0(x))). \end{aligned}$$

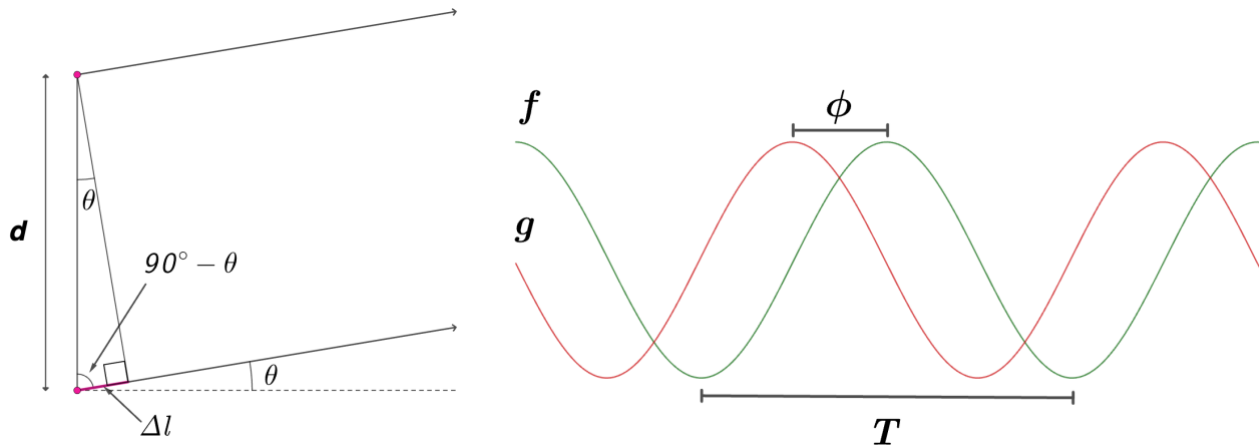
Frem til nu, har der ikke været nogen fysiske overvejelser. Det har udelukkende været matematiske argumenter.

I det ideelle dobbeltspalteforsøg, har de to spalter samme bredde, samme afstand til skærmen, og de ændrer ikke ved fotonernes (lysets) fase og amplitude. Vi antager yderligere at det er plane bølger der sendes ind mod gitteret. Det betyder at amplituderne $A_0(x)$ og $A_1(x)$ ikke afhænger af x , og vi kan derfor skrive:

$$P_{int}(x) = \frac{1}{2} (A_0^2 + A_1^2 + 2A_0A_1\cos(\phi_1(x) - \phi_0(x))).$$

Interferensen skyldes derfor udelukkende faseforskellen $\phi_1(x) - \phi_0(x) = \phi$.

Faseforskellen i dobbeltspalteforsøget skyldes udelukkende forskellen i den optiske vejlængde $\Delta\ell$, for de to muligheder; venstre spalte og høje spalte. Se figur 1.



Figur 1. Venstre: To spalteåbninger i afstanden d fra hinanden, betragtes som punktkilder der oscillerer i takt (de er i fase). Pilene fra hver punktkilde peger mod x på skærmen og er parallelle, når skærmen er langt væk. Forskellen i den optiske vejlængde følger af geometrien $\Delta\ell = d \sin(\theta)$.

Højre: Faseforskellen ϕ , mellem to harmoniske bølger, hvor T er perioden (ikke at forveksle med operatoren).

Betragt de to funktioner $f(t)$ og $g(t)$, hvor ϕ er faseforskellen mellem de to funktioner:

$$f(t) = \cos(t) \text{ og } g(t) = \cos(t + \phi)$$

Da funktionerne har en periode på $T = 2\pi$ kan vi nu opskrive forskellen i fasen mellem de to bølger fra hver spalte ved skærmen som:

$$\frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta\ell}{\lambda} \Leftrightarrow \phi = 2\pi \frac{\Delta\ell}{\lambda} = \frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda}$$

hvor λ er bølgelængden.

Det ses at der er destruktiv interferens for $\Delta\ell = n\frac{\lambda}{2}$ og konstruktiv interferens for $\Delta\ell = n\lambda$, $n = 1, 2, ..$

Det følger derfor nu at

$$P_{int}(x) = \frac{1}{2} \left(A_0^2 + A_1^2 + 2A_0A_1 \cos\left(\frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda}\right) \right)$$

Hvor sammenhængen mellem x på skærmen og θ , kan findes geometrisk og afhænger af afstanden mellem spalter og skærm.

Hvis begge spalter bidrager lige meget, som de gør i den perfekte forsøgsopstilling, gælder der at: $A_0 = A_1 = A$ og derfor at:

$$P_{int}(x) = \frac{1}{2} \left(2A^2 + 2A^2 \cos \left(\frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \right) \right) = A^2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \right) \right) = A^2 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \right)$$

Klassisk er denne sandsynlighed lig med intensiteten af lyset i punktet x på skærmen⁴.

Udtrykket $P_{int}(x)$ gælder for interferensen mellem de to spalter, når de antages som ideelle punktkilder. I dette tilfælde bestemmes intensitetsfordelingen udelukkende af faseforskellen mellem de to veje, hvilket fører til et rent dobbeltspalte-interferensmønster.

I det virkelige eksperiment har hver spalte imidlertid en endelig bredde. Det betyder, at lyset fra hver enkelt spalte i sig selv danner et diffraktionsmønster, svarende til enkeltspalte-diffraktion. Det er interferensen af disse to diffraktionsmønstre der giver den endelige amplitude på skærmen.

Intensiteten, eller sandsynligheden i kvantetilfældet, beregnes som kvadratet af summen af de to amplituder. Resultatet er:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d \sin(\theta)}{\lambda} \right) \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda} \right)}{\frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}} \right]^2$$

a er spaltebredden⁴.

Fysisk betyder det, at dobbeltspalte-interferensen kun kan observeres i de retninger, hvor enkeltspalterne tillader udbredelse af lys. Interferensstriberne ligger således indhyldet i enkeltspaltens diffraktionsmønster.

Ved analyse af de eksperimentelle data skal man være opmærksom på de relative intensiteter i de tre forsøg. Når man sammenligner med sandsynlighederne udledt i den kvantemekaniske gennemgang af varianterne (1) - (3), skal man tage højde for, at de fysiske polarisationsfiltre foran spalterne reducerer intensiteten. Dette kan indregnes i $P_E(x)$ i (2) ved at gange med en transmissionsfaktor $\nu = 1/2$. Det samme gælder for $P_D(x)$ i (3)⁵. Fra dette kan man vise, at hvis det centrale maksimum er I_0 i forsøg (1) forventes det at være $I_0/4$ i (2) og (3). I praksis er intensiteterne gennem de to spalter sjældent ens, hvilket kan give afvigelser fra både denne teoretiske forventning og det ideelle billede vist i figuren i starten af vejledningen, bl.a. ved at interferensminima ikke nødvendigvis går i nul.

Husk, at fotonen ikke "vælger" en bestemt sti på et bestemt tidspunkt. Interferensen forsvinder ikke, fordi man aktivt måler, hvilken spalte fotonen går igennem, men fordi information om stien er tilgængelig i princippet – også selv om den ikke aflæses. Interferensmønstret opstår pga. superpositionen af mulige stier for den enkelte foton – ikke fordi fotonen vekselvirker med sig selv. Komplementaritetsprincippet: hvad man kan observere — interferens (bølge) eller hvilken-vej-

⁴ kapitel 14 i MIT-kurset [Visualizing Electromagnetism](#).

⁵ Alternativt kan man indbygge filtertabet direkte i tilstanden ved at bruge $|\psi'_E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|V\rangle + |1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|H\rangle)$ i udledningerne (2) og (3). Da $|\psi'_E\rangle$ ikke er normeret, svarer det til at kun halvdelen af fotonerne passerer polarisationsfiltrene ved spalterne.

information (partikel) — afgøres af måleopstillingen, også selv om den ændres efter at fotonen har passeret dobbeltspalten. Så hvad var den inden spalterne? I kvantefysik giver det ikke mening at sige, at fotonen var enten en bølge eller en partikel i klassisk forstand. Inden dobbeltspalten beskrives den af en kvantetilstand, hvis amplitude kan gå mod begge spalter, men som altid registreres som en partikel (ét klik ét sted). Hvilket aspekt der kommer til udtryk i data, afhænger af om stierne er uadskillelige (interferens) eller skelnelige (hvilken-vej).