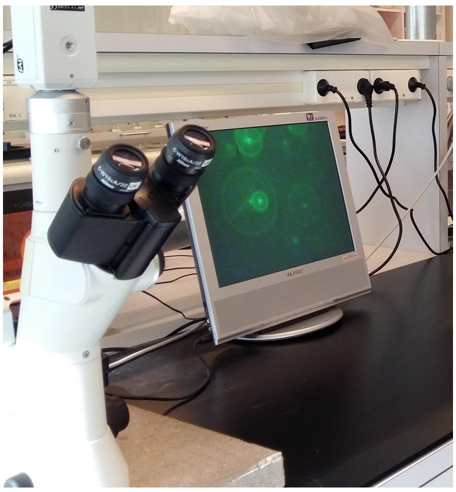
FysikLab Forsøgsvejledning

Brownske Bevægelser

FKF - Institut for Fysik, Kemi og Farmaci

12. september 2020



Udarbejdet af:
Jakob Benfeldt, Mikkel Hansen og Philipp Johannesen

Forord

Velkommen til FysikLabs laboratorieøvelser.
I FysikLab har I mulighed for at udføre aktiviteter og forsøg, som supplerer og perspektiverer materialet fra Jeres egen undervisning. Her lærer I, hvordan matematikken kan anvendes til at bygge og analysere modeller, der beskriver fysiske fænomener. I lærer også, hvordan man udfører eksperimenter og analyserer resultaterne.
Vi anbefaler, at I tager jer tid til at lege med opstillingerne og at I selv prøver jer frem til at finde løsningerne til de stillede opgaver. Af erfaring ved vi, at man opnår både overraskende og interessante resultater, hvis man ikke altid følger bogen, så I opfordres til at stille jeres egne teorier op og afprøve dem. Det er i øvrigt også den mest naturlige måde at forstå fysik på!

Laboratorieplads

Alle arbejdspladser er udstyret med en Microsoft Windows PC, som har officepakken installeret. Da bordpladsen i laboratoriet er begrænset, kan I desværre ikke bruge egne laptops.
Bemærk at der er særlige programmer installeret på PC'erne, der kommunikerer med den eksperimentelle opstilling. Bemærk også at denne software kan gemme data i filformater, som måske ikke kan åbnes på jeres computere derhjemme, så vælg det rigtige format når i gemmer data på et medbragt USB-stik.

Sikkerhed

I laboratoriet gælder de almindelige arbejdsmiljøregler, som man skal orientere sig om på instituttes hjemmeside, før man møder op til laboratorieøvelserne: `https://www.sdu.dk/da/om_sdu/institutter_centre/fysik_kemi_og_farmaci/arbejdsmiljo`.
Alt udstyr er gennemprøvet og lever så vidt som overhovedet muligt op til de gældende sikkerhedsstandarder.
Det er den studerendes pligt at gøre personalet opmærksom på eventuelle fejl og mangler ved udstyr, som kan bringe en selv eller andre personer i fare. Ligeledes skal man altid arbejde med omhu og omtanke på en sådan måde, at man ikke udgør en fare for de andre.
Mad- og drikkevarer er ikke tilladt i laboratoriet.

Coronaregler

Covid-19 spreder sig i disse tider i samfundet og vi har på SDU visse retningslinjer, som alle der opholder sig på universitetet skal følge for at begrænse smittespredningen.

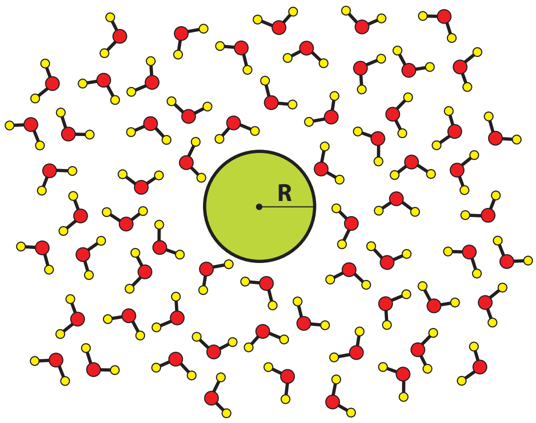
- **Følge myndighedernes retningslinjer** når i befinder jer på universitet, og vær opmærksom på eventuelle yderligere lokale restriktioner i Odense. Jeres kontakt på SDU vil gøre deres bedste for, at give jer den relevante information, men vi opfordre jer til selv at udvise samfundssind.
- **Mød ikke op** hvis du udviser symptomer på Covid-19. Læs mere om symptomerne på Covid-19: https://www.ssi.dk/sygdomme-beredskab-og-forskning/sygdomsleksikon/c/covid19.
- **Kontakt universitet** hvis du oplever symptomer eller tester positiv i dagene efter dit besøg. Bed din lærer om at skrive til hans eller hendes kontakt på universitet så vi kan opspore og stoppe en eventuel spredning hurtigst muligt.
- Under jeres besøg vil I blive lukket ind af bestemte indgange og begrænset til at opholde jer i visse lokaler. Det vil **IKKE** være muligt at benytte universitets kantine, og i skal derfor selv medbringe madpakke.
- Da I betragtes som et stamhold vil der ikke være noget indbyrdes afstandskrav mellem personer i jeres klasse. Dog skal myndighedernes til en hvert tid gældende afstandskrav overholdes i forbindelse med kontakt til ansatte og studerende på universitet. Kan dette ikke overholdes, f.eks. i forbindelse med laboratorieøvelser, vil den ansatte eller studerende bære mundbind.
- De lokaler og laboratorier i vil opholde jeg i under jeres besøg vil blive afsprittet før og efter jeres besøg.

1 Formål

I denne øvelse studeres fænomenet Brownske Bevægelser. Fænomenet beskriver store molekylers bevægelse i en opløsning af mindre molekyler, som f.eks. vand. I skal ved hjælp af en film optaget via et mikroskop, bestemme diffusionskoefficienten for en polystyrenkugle i vand. Diffusionskoefficienten siger noget om hvordan kuglen bevæger sig, og er bla. afhængig af størrelsen på kuglen, og hvad kuglen er nedsunket i. Som i kan læse om i sektion 2, så er kuglens bevægelse tilfældig, og i skal benytte forskellige statistiske begreber for at beskrive dens bevægelse.
Idéen med at følge én bestem kugles bevægelse kaldes 'single particle tracking' og er en teknik ofte benyttet i biofysik til at undersøge, hvordan enkelte biomolekyler bevæger sig rundt i levende celler. Via denne teknik kan fysikere lære noget om, hvordan de allermindste bestanddele af en celle fungerer.

2 Teori

2.1 Mekanismen bag Brownsk bevægelse

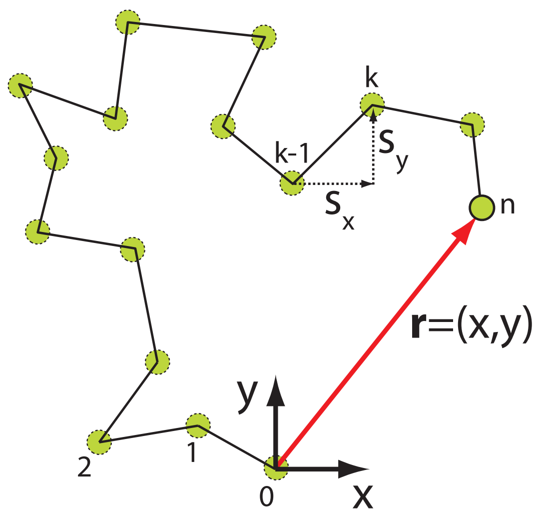


Figur 1: *Illustration af en Brownsk partikel omgivet af vandmolekyler. Størrelsesforholdet passer ikke da kuglen i eksperimentet er langt større i forhold til vandmolekylerne end set i denne figur.*

Mekanismen bag Brownsk bevægelse kan forklares således: En Brownsk partikel er typisk meget større end de væskemolekyler, som omgiver den. I det aktuelle forsøg er plastickuglen ca 10.000 gange større end et vandmolekyle. Vandmolekylerne bevæger sig tilfældigt rundt med en gennemsnitlig hastighed, som er proportional med vandtemperaturen, hvilket betyder at, jo højere temperatur, des højere hastighed. Vandmolekylerne vil kollidere med plastickuglen fra alle sider, men kollisionerne rammer den fra tilfældige retninger, og af denne grund er kraften på kuglen ikke lige stor fra alle sider. Dette betyder, at der over hvert lille tidsinterval virker en netto/gennemsnitslig kraft på kuglen, som får den til at bevæge sig. Kraften ændrer hele tiden retning og størrelse således at kuglen udfører en tilfældig bevægelse i væsken.

Brownsk bevægelse er en tilfældig bevægelse. En Brownsk partikel vil gennemløbe en specifik bane over et tidsrum, men hvis man måler igen senere, vil man måle en anden bane. Dette skyldes bevægelsens tilfældige (stokastiske) natur, forårsaget af vandmolekylerne. Der er dog ligheder mellem to baner, men for at se lighederne må man se på de statistiske egenskaber af bevægelsen. Et eksempel på en statistisk egenskab er den gennemsnitslige forskydning i x-retningen over et tidsrum t. De statistiske egenskaber af Brownsk bevægelse kan beskrives ved fysiske love, hvorimod den specifikke bane for en Brownsk partikel ikke kan forudsiges. Dette svarer helt til at slå med terninger: Vi ved at der i gennemsnit er en sandsynlighed på 1/6 for at slå en sekser, men vi kan ikke forudsige udfaldet, inden vi kaster terningen. Stokastiske fænomener adskiller sig på dette punkt grundlæggende fra deterministisk mekanik, som vi eksempelvis finder for planetbaner, hvor vi har nogle love, der med stor nøjagtighed kan fortælle os, hvor en planet er til et hvilket som helst tidspunkt, vi ønsker at vide det.

2.2 Grundlæggende antagelser og definitioner



Figur 2: *Illustration af den matematiske beskrivelse af en enkel Brownsk partikel, som bevæger sig tilfældigt rundt og som til tiden* $t = n\delta t$*, befinder i positionen (x,y). Skridtene* s_x *og* s_y *er også indikeret.*

Vi vil nu se på, hvordan den tilfældige bevægelse af en Brownsk partikel kan beskrives matematisk. Vi kigger derfor på plastikkuglen i figur 2. Figuren viser et system indeholdende en kugle, som diffunderer (bevæger sig) tilfældigt rundt. Partiklens position i 2 dimensioner er beskrevet ved vektoren $\vec{\mathbf{r}} = (x,y)$. Partiklens position bliver observeret 'stroboskopisk', dvs. efter hvert tidsinterval δt, og til tiderne $t_1, t_2, t_3, \ldots t_k, \ldots$, med forskellen mellem to tidsintervaller, $t_k - t_{k-1} = \delta t$. **I vores eksperiment måler vi tilvæksten/ændringen i kuglens position mellem billederne i filmen.** Med t_k menes der billede nummer k i rækken af billeder. Hvis vi har 20 billeder, kan k antage én af værdierne fra 1 til 20.
Vi har følgende definitioner:

δt = Tiden mellem to efterfølgende billeder i filmen, også kaldet et tidsskridt. Tidsskridtet er det samme mellem alle billeder og δt er derfor uafhængig af k.

$s_x(k)$ = $s_x(k) - s_x(k-1)$. Tilvæksten i x-koordinaten for det k'te tidsskridt i filmen.

$s_y(k)$ = $s_y(k) - s_y(k-1)$. Tilvæksten i y-koordinaten for det k'te tidsskridt i filmen.

$\vec{\mathbf{s}}(k)$ = $[s_x(k), s_y(k)]$. Tilvæksten på vektorform i 2 dimensioner. Det er dermed blot en anden og mere kompakt måde at skrive de 2 ovenstående udtryk.

$\vec{\mathbf{r}}(n)$ $= [x(n),y(n)] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{s}(k)$. Partiklens *position* efter n antal tidsskridt under antagelse af, at det første skridt startede i origo/nulpunktet (0,0). Her er alle skridtene, partiklen har taget, altså lagt sammen og giver den nøjagtige position set fra der, hvor partiklen startede.

$\vec{\mathbf{P}}(s_x,\delta t)$ = Sandsynlighedstætheden for, at partiklen i x-retningen flytter sig s_x i løbet af tiden δt. Sandsynlighedstætheden kan forstås som en funktion, der giver sandsynligheden for, at en given bevægelse finder sted. Den kan for eksempel vise, at der er 20% sandsynlighed for, at partiklen bevæger sig 1 millimeter i x-retningen, og at der er 1% sandsynlighed for, at partiklen bevæger sig 50 millimeter i x-retningen. Partiklen tager nemlig ikke altid lige lange skridt, da det afhænger af, hvordan vandmolekylerne støder sammen med partiklen.

De mange sammenstød mellem partiklen og væskens molekyler gør, at positionsændringerne kan betragtes som værende tilfældige. Brownsk bevægelse i et uendeligt område uden hindringer af nogen art kan forstås ud fra den matematiske antagelse, at positionsændringerne $\mathbf{s}(k)$ alle er[1]:

1. Statistisk uafhængige. Dette betyder, at kendskab til partiklens position som funktion af tiden intet fortæller om størrelsen eller retningen af den næste tilvækst.

2. Identisk fordelte. Dette afspejler rummets *isotropi*. Ligegyldigt hvor den Brownske partikel befinder sig, bliver den udsat for den samme påvirkning af væsken.

2.3 Statististiske egenskaber af position og positionstilvæksterne

Vores Brownske bevægelse udføres af kugler i en tre-dimensional beholder, som er stor sammenlignet med kuglernes størrelse. Derfor er det rimeligt at antage, at bevægelsen er upåvirket af beholderens sider, og at kuglerne ikke påvirker hinanden. Kuglebevægelsen kan opløses i x, y og z retninger i et standard koordinatsystem, også kaldet et kartetisk koordinatsystem. Da hver retning er uafhængig af de andre, kan vi nøjes med at beskrive bevægelsen i én dimension ad gangen. Vi vil nu se nærmere på nogle statistiske egenskaber af positionstilvæksten s_x i x-retningen. Det første vi må forlange er at sandsynlighedstætheden $P(s_x,\delta t)$ er normeret, hvilket betyder, at lægges alle små sandsynligheder sammen, skal det give 1. Skrevet op med et integral-tegn, og integreret fra $-\infty$ til ∞ for at sikre, at alt er med, ser det således ud:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(s_x, \delta t) = 1. \tag{1}$$

Grunden til, at denne ligning skal overholdes, er at partiklen skal være et sted. Hvis alle muligheder tages med, og man får mere end 1, betyder det at der er over 100% sandsynlighed for, at vi finder partiklen, hvilket ingen mening giver. Det gør, at vi netop

[1] **Bemærkning om gyldigheden af antagelserne.** Inden for en (meget) lille tid τ, vil en Brownsk partikel ikke nå at kollidere med de omkringliggende væskemolekyler. Dens bevægelse vil i samme tidsrum være bestemt, via Newtons love, af dens position og hastighed. Vores antagelse om at positionsændringerne er tilfældige kan ikke opfyldes i dette 'ballistiske' regime. I praksis er den typiske tid mellem kollisionerne så mikroskopisk lille, at den ballistiske opførsel ikke kan observeres. Det er dog klart, at i grænsen $\delta t \to 0$ må den statistiske beskrivelse af bevægelsen bryde delvis eller helt sammen.

skal få 1, for er alle steder undersøgt, så er der 100% sandsynlighed for, at vi har fundet den.
Derudover er der lige stor sandsynlighed for positive og negative ændringer, da skridtene ikke har nogen foretrukken retning. Hermed er *forventningsværdien* $E(s_x)$ lig nul:

$$E(s_x) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x P(s_x, \delta t) = 0. \tag{2}$$

Forventningsværdien af en variabel er defineret som integralet af variablen ganget med sandsynlighedstætheden. Derved får man størrelsen af tilvæksten ganget med sandsynligheden for denne tilvækst, hvilket fortæller os noget om, hvor stor en ændring vi forventer at se for hvert tidsskridt. Med andre ord, har partiklen bevæget sig ét skridt, så ganges det skridt med sandsynligheden for netop sådan et skridt, og dette gentages for alle mulige skridt. Forventningsværdien er blot et andet ord for middelværdien.

Variansen af s_x er defineret på følgende måde:

$$\mathrm{Var}(s_x) = E([s_x - E(s_x)]^2) = E(s_x^2) - [E(s_x)]^2. \tag{3}$$

Da det sidste led $[E(s_x)]^2$ er nul (Se ligning (2)), er variansen lig med forventningsværdien af s_x^2:

$$\mathrm{Var}(s_x) = E(s_x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x^2 P(s_x, \delta t) \tag{4}$$

Variansen af s_x er et mål for kvadratet på den *afstand*, partiklen flytter sig i løbet af tiden δt.

For en prøve (sample) med n værdier udtaget fra fordelingen $P(s_x,\delta t)$ kan prøvesættets middelværdi bestemmes som:

$$\bar{s}_x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_x(k) \tag{5}$$

tilsvarende kan prøvesættets varians bestemmes som:

$$\mathrm{S}(s_x) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} [s_x(k) - \bar{s}_x]^2. \tag{6}$$

Ligning (6) kan benyttes i analysen af de eksperimentelle data for kuglens bevægelse som et eksperimentelt estimat af den sande varians.

Vi vil nu se nærmere på, hvordan $\mathrm{Var}(s_x)$ afhænger af tiden. Variansen er et mål for bredden af sandsynlighedstætheden $P(s_x,\delta t)$. Den fortæller altså, hvor meget en prøve kan *variere* fra måling til måling. Vi må forvente, at bredden og hermed variansen går mod nul for $\delta t \to 0$, ganske enkelt fordi partiklen ikke kan nå at flytte sig ret meget i løbet af meget kort tid. Man kunne måske forestille sig, at variansen kunne afhænge af tiden på mange måder, men den eneste konsistente mulighed er, at variansen er lineært proportional med tiden δt:

$$\mathrm{Var}(s_x) \propto \delta t \tag{7}$$

Ved at løse diffusionsligningen længere nede i teoriafsnittet, kan man vise at variansen rent faktisk er givet ved

$$\boxed{\mathrm{Var}(s_x) = 2D\delta t} \tag{8}$$

Hvilket netop er en lineær afhængighed.
Konstanten D kaldes *diffusionskoefficienten*. Den styrer, hvor hurtigt en Brownsk bevægelse foregår, og bestemmelsen af D ved Einsteins udtryk er nærmere omtalt i afsnit 2.4.
Variansen af tilvæksten $x(j)$ efter j tidsskridt svarende til tiden $t = j\delta t$ er tilsvarende:

$$\boxed{\mathrm{Var}[x(j)] = 2Dj\delta t = 2Dt} \tag{9}$$

I tilfældet hvor j=1 reducerer ligning (9) til ligning (8).

Standardafvigelsen $\sigma(s_x)$ er defineret som kvadratroden af variansen:

$$\sigma(s_x) = \sqrt{\mathrm{Var}(s_x)} = \sqrt{2D\delta t} \tag{10}$$

Standardafvigelsen σ har den fordel, at den har samme enhed som den oprindelige variabel (s_x) og kan derfor direkte sammenlignes med denne.

2.4 Beregning af diffusionskoefficienten

I 1905 bestemte Albert Einstein[2] et udtryk for diffusionskoefficienten for kugleformede mikroskopiske legemer i et viskøst medie. Dette er et afgørende resultat som forbinder Brownsk bevægelse med væskens viskositet:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R} \tag{11}$$

Her er k_B Boltzmanns konstant (=$1.38\cdot10^{-23}$ J/K), T er den absolutte temperatur målt i kelvin, η er viskositeten af det medium, legemet diffunderer i, og R er radius af det kugleformede legeme. Einsteins teori forudsiger, at diffusionskoefficienten D afhænger af 3 fysiske parametre: [I] Partiklens størrelse, [II] væskens viskositet samt [III] temperaturen.

2.5 Diffusionsligningen og dens løsning

Indtil nu har vi set på nogle generelle egenskaber af positionstilvæksterne som eksempelvis deres varians. Men vi er også interesseret i den præcise form af sandsynlighedstætheden P, da den bliver målt i eksperimentet. Sandsynlighedstætheden $P(x,t)$ er bestemt af en fundamental differentialligning kaldet *diffusionsligningen*. I én dimension har diffusionsligningen følgende form:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{12}$$

Diffusionsligningen er en lineær differentialligning og ved løsning af den, finder man sandsynlighedstætheden $P(x,t)$. Diffusionsligningens løsninger afhænger af systemets geometri og af hvilke grænsebetingelser og startbetingelser, man pålægger systemet.

[2]A. Einstein: *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.* Annalen der Physik **17** 549-560 (1905)

Vi vil nu se på en specifik løsning til diffusionsligningen (12). I relation til øvelsen er vi specielt interesserede i løsningen $P(x,t)$ som angiver sandsynlighedstætheden for tilvæksten x efter tiden t, hvor vi antager, at skridtene går mod nul for korte tider. Ud fra denne begyndelsesbetingelse findes løsningen:

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[\frac{-x^2}{4Dt}\right] \tag{13}$$

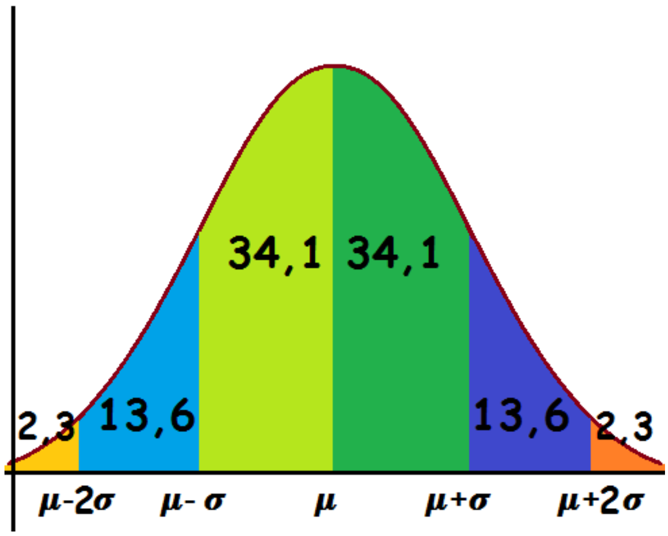
Bemærk at i eksperimentet er tiden t tidsskridtet mellem nabobilleder dvs $t = \delta t$. Tilvæksten x i ligning (13) svarer dermed til s_x da dette jo netop er tilvæksten mellem nabobilleder. Med denne udskiftning af symboler får vi nu sandsynlighedstætheden $\mathrm{P}(s_x,\delta t)$:

$$P(s_x,\delta t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\delta t}} \exp\left[\frac{-s_x^2}{4D\delta t}\right] \tag{14}$$

Det ses at ligning (14) svarer til fordelingsfunktionen for en normalfordeling (se figur 3):

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{15}$$

Her betegner σ standardafvigelsen for normalfordelingen, og μ er middelværdien for normalfordelingen. Når vi sammenholder ligning (14) med (15) ses, at standardafvigelsen er $\sigma = \sqrt{2D\delta t}$, og vi har dermed fundet proportionalitetskonstanten $2D$ i ligning (9).



Figur 3: *Et eksempel på en normalfordeling. y-aksen angiver sandsynligheden for variablen, givet ved en x-værdi, og x-aksen angiver den variabel, man ønsker at undersøge. Her ses tydeligt, hvad middelværdien er, og hvad en standardafvigelse er.*

2.6 Om relation mellem teori og eksperimentet

Teorien for Brownsk bevægelse siger noget om de *statistiske* egenskaber af bevægelsen. Man skal derfor lave mange gentagne målinger på en Brownsk partikel for at kunne sammenligne teori med eksperiment. Dette løses på følgende måde: I optager en digital film, som følger en kugles bevægelse over tid. Filmen består af et antal billeder (frames) som er taget med et veldefineret tidsinterval, typisk δt=0.05 sekunder. Vi betragter hvert eneste billede i filmen som en måling. Vi bestemmer, hvor langt kuglen bevæger sig mellem to nabobilleder og får dermed et sæt tilvækster s_x og s_y i henholdsvis x og y retningen. Ved at undersøge hvordan tilvæksterne er fordelt statistisk, kan vi undersøge overensstemmelsen med teorien.

3 Opgaver

For at komme godt ind i teorien, er det altid godt med nogle opgaver. Herunder findes nogle af slagsen, som vi anbefaler, i har lavet, inden i kommer i laboratoriet, da i vil få mest ud af tiden på denne måde.

3.1 Opgave 1 - Grænserne

Inde for fysikken kikker vi ofte på ligninger med henblik på at finde ud af, hvad der sker, når en parameter bliver større, eller mindre. Herunder er et par korte spørgsmål, som gør netop dette for ligning (11):

- Hvis radius af kuglen bliver større, hvad sker der så med diffusionskoefficienten?
- Hvis forsøget var udført i en sauna, ville diffusionskoefficienten så være større eller mindre, end hvis vi lavede det ved stuetemperatur?
- Viskositet er et begreb ofte brugt i kemien og er et udtryk for, hvor flydende en vækse er. Find diffusionskoefficienten for henholdsvis vand og olie og brug dem til at svare på i hvilket medie, diffusionskoefficienten vil være størst.

3.2 Opgave 2 - størrelsen af diffusionskoefficienten

Forsøget vil blive udført ved stuetemperatur, og med kugler, med en diameter på 1μm. Viskositeten af vand er $\eta = 282\mu\text{Pa}\cdot\text{s}$. Beregn diffusionskoefficienten for denne situation, og skriv værdien ned, så i senere kan sammenligne med jeres eksperiment.

4 Opsætning og udførelse

4.1 Øvelsesoversigt

I øvelsen anvendes polysterenkugler med en diameter på 1μm, hvor $1\mu\text{m} = 10^{-6}$m. Kuglerne har en fluorescerende egenskab, hvilket gør, at de ved belysning med blåt lys udsender grønt lys. Dette betyder, at kuglerne kan observeres under fluorescens-mikroskopet, da kuglerne under et almindeligt mikroskop ville være usynlige. Opløsningen er fortyndet, og det gør at individuelle kugler kan skelnes fra hinanden. Med mikroskopet kan kuglens position kun bestemmes i xy-planen. Men så længe kuglen forbliver nogenlunde i fokus under filmen, er dette dog uden betydning, da alle tre koordinatretninger er uafhængige. Øvelsens opbygning:

1. Forberedelse og montering af prøven i mikroskopet (ved instruktor/studerende).
2. Optagelse af videosekvens.

3. Sporing af kuglebevægelsen.
4. Statistiske beregninger på de registrerede baner.
5. Besvarelse af opgavespørgsmål.

4.2 Observation af kugler med fluorescens-mikroskopet

Vi anvender mikroskopets 100X objektiv, som giver den maksimale forstørrelse. Denne forstørrelse er nødvendig for at kunne følge kuglernes små bevægelser. Læg en lille papæske over beholderen, så der ikke kommer forstyrrende baggrundslys ned i mikroskopet. I kan flytte prøven med drejepinden på siden af mikroskopet. Ved at justere fokus kan man stille skarpt på forskellige højder i væskecellen. Forsøg først at finde bundpladen i cellen med kugler som ligger stille. Fokuser dernæst på kugler over dette niveau som er i bevægelse. Kuglerne er i fokus, når de fremtræder punktformede uden ringe omkring sig.

- Når et fornuftigt sæt af kugler er fundet og i fokus (dvs. ingen ringe), skal I optage en video-sekvens af deres bevægelse med programmet "Pinnacle Studio". Benyt funktionen "Import"til at optage filmen.
- Husk følgende indstillinger: Under 'Mode' vælges 'Custom', og under 'Compression Codec' vælges DV.
- Skriv et filnavn i feltet 'Filename' INDEN I begynder optagelsen med 'Start Capture'.
- Lad programmet optage i 20-30 sekunder, før optagelsen stoppes. Hold øje med at der er mindst én kugle, der er i fokus under hele optagelsen. **Forsøg at undgå vibrationer og stød på bordet mens filmen optages, da dette vil give fejl i data på kuglebevægelsen.**
- Filmen gemmes automatisk i mappen, som er vist under 'Import To'. Gem filmen et sted, hvor I kan finde den senere, da den skal bruges til databehandling.

4.3 Matlab

Videosekvensen skal undersøges i programmet Matlab, som kan åbnes via genvejen på skrivebordet. I Matlab åbnes der tre vinduer på samme tid, som da er:

- **Workspace:** Indeholder de variable, som Matlab har tilgængelig. Disse variable kan benyttes via indtastning af kommandoer i 'Command Window'. Eksempel: Indtast $a = 5$ i 'Command Window', og tryk på Enter. Nu vil variablen a dukke op i 'Workspace' og har fået tildelt værdien 5. Når a indtastes i 'Command Window' vil Matlab spytte svaret $a = 5$ ud. Regnestykket $3 \cdot 5$ kan derfor skrives som $3 \cdot a$, som i begge tilfælde resulterer i svaret 15.
- **Command Window:** Her skrives de kommandoer, i ønsker udført i Matlab.
- **Command History:** En liste over de kommandoer, som er blevet brugt i 'Command Window'.

Filmsekvensen indlæses ved at indtaste kommandoen TrackerFysikLab i 'Command Window', hvorefter et nyt vindue dukker op; 'Load Brownian Movie' indlæser filmen. Derefter indstilles niveauet i højre side af billedet for at justere den tærskelværdi, som omdanner billedet til sort/hvid (I kan også benytte pil op/ned). Idealet er, at partiklerne til sidst kun fremstår som hvide klatter på en helt sort baggrund. Formålet er at identificere partiklerne og skelne dem fra baggrundsstøjen. Bemærk: Justeringen af tærskelværdien skal udføres både for det første og det sidste billede i filmen.
Når tærskelværdien er indstillet, trykkes på 'Start Tracking', og partiklernes position bestemmes.

5 Databehandling

Forsøget er nu udført, og der kan laves databehandling. Data behandlingen skal enten laves i MatLab (anbefalet) eller i Excel. Det er anbefalet, at i laver databehandlingen i Matlab da det er vores foretrukne program som fysikere. Databehandlingen består af en række statistisk beregninger, som har til formål at få en nærmere forståelse af kuglens bevægelse. Det er yderst vigtigt, at i besvarer de afsluttende spørgsmål, som omhandler hvad graferne egentlig betyder!

5.1 Matlab

Matlab er et program som oftest benyttes af fysikere og ingeniører, når de skal arbejde med store mængder data. Matlab står for Matrix Laboratory og er fantastisk til vektorer og matricer. En vektor i programmeringsverdenen er blot en lang række tal, og en matrix er en firkant fyldt med tal. Matlab har en lang række indbyggede funktioner, som i kommer til at bruge et lille udsnit af.
Husk at gemmr jeres plots, når i har lavet dem!
TrackerFysikLab giver følgende vektorer:

- **x,y**: Datavektorer med kuglens koordinater i meter.
- **sx,sy**: Tilvæksten i henholdsvis x og y fra et step til det næste.
- **s2x, s4x, s6, s8x**: Tilvæksten i x for henholdsvis hvert andet, fjerde, sjette, og ottende billede.
- **DeltaTime**: Tiden mellem to billeder.

5.1.1 Plot en partikels bane samt skridtene

For at få en partikels bane kan i skrive "plot(x,y)". For at få ens axer kan i skrive "axis equal".
Er der en tendens til at partiklen bevæger sig i en retning? Kan i forklare hvorfor den har denne tildens?
Plot nu tilvæksten i x-retningen (sx) ved igen at benytte "plot()-kommandoen. Hvad viser dette plot? Er der en bestemt tendens for skridtene i x-retningen?

5.1.2 Hvordan er kuglens skridt fordelt?

Alt i dette afsnit skal i lave for både sx og sy.
Vi ønsker at se på, hvordan skridtenes længde er fordelt. Dette kan gøres ved brug af et histrogram, som i MatLab laves ved hjælp af kommandoen "histrogram(data,bins)". Her er data jeres skridt (altså enten sx eller sy), og bins er et helt tal, som angiver hvor mange "dele"jeres data deles op i. Prøv jer frem med tal fra 3-25 og se, hvad forskellen er.
Når i har fundet et passende tal, overvej så formen på jeres histrogram. Hvad fortæller dette jer?

5.1.3 Variansen og Standardafvigelsen

Variansen og standardafvigelsen er to statistiske parametre, som kan beskrive kuglens bevægelse. De kan begge benyttes til at finde kuglens diffusionskoefficient, som er den karakteristiske størrelse for kuglen, vi søger. Med karakteristisk menes, at det er en værdi, som er afhængig af kuglen. Hvis i havde valgt en anden størrelse kugle ville, diffusions koefficienten have været en anden. Det at finde variansen og standardafvigelsen i MatLab er utrolig nemt, da matlab har de indbyggede funktioner "var()"til variansen og "std()"til standardafvigelse. De kan begge benyttes til at finde diffusionskoefficienten D, men standardafvigelsen har den fordel, at den har samme enhed som bevægelsen (meter) og kan derfor være nemmere at forholde sig til.
Find disse to værdier for henholdsvis sx og sy og skriv dem ned.

5.1.4 Find Diffusionskoefficienten og kuglens størrelse

Både diffusionskoefficienten og kuglens størrelse kan findes ved brug af de ligninger, i læste om i teorien.

$$Var(s_x) = 2D\delta t, \qquad \sigma\left(s_x\right) = \sqrt{2D\delta t} \tag{16}$$

$$D = \frac{k_b T}{6\pi\eta R} \tag{17}$$

I kan finde viskositeten på nettet. Forsøget er lavet i vand ved stuetemperatur.
Hvilken værdi for δt er den rigtige at bruge her? Hvad var det, δt betød, og hvordan hang den sammen med sx og sy?
Skriv både D og R ned, det er nogle af de vigtigste resultater.

5.1.5 Undersøgelse af Variansens afhængighed af tiden

Fra teorien ligning (9) og (10) ved vi, at variansen af sx skal stige proportionalt med tiden δt, og vi vil nu undersøge, om dette også er tilfældet. Programmet TrackerFysikLab gav vektorerne $sx, s2x, s4x, s6x, s8x$, og vi skal nu benytte disse.
Tallet 2, 4, 6 og 8, indikerer hvor mange billeder, der går mellem to indtastninger i vektoren. Hvad er tiden mellem disse billeder, når der er δt mellem to billeder?
Beregn nu variansen for de fire vektorer.
I skal nu lave 2 vektorer, en der hedder varians, og en der hedder time. Punkterne tilføjes ved:

$$varians(1) = \text{maalt vartians 1;} \qquad time(1) = \text{tidsintervallet;} \tag{18}$$

På samme måde tilføjes de næste 3 punkter, ved at øge indekset med 1.
Lav et plot i MatLab med funktionen "plot(time,varians,'o'). Hvad viser dette plot?
Ved at fitte en ret linje kan i bestemme hældningen og dermed diffusionskoefficienten ved at benytte de ligninger i tidligere har brugt. Lav et lineært fit ved at skrive polyfit(x,y,1).

5.1.6 Er skridt i alle retninger lige sandsynlige?

For at danne jer et overblik kan i plotte (sx,sy). Hvad fortæller dette plot? Kan i se en klar tendens?
Hvis dette skal undersøges ordenligt, omregnes alle x- og y-værdier til det der kaldes polære koordinater. Det er et sæt koordinater, hvor alle punkter er givet ud fra r,θ og ikke x og y. Matlab har en funktion til dette kaldet "Cart2pol". Brug denne og lav derefter et histogram over fordelingen af vinklerne.

Når alle ovenstående punkter er løst, kan i springe afsnittet "Excel"over og besvare de opfølgende spørgsmål.

5.2 Excel

Hvis databehandlingen skal laves i Excel, er første opgave at få dataen ind i excel. Programmet TrackerFysikLab, som i benytter, genererer en MatLab-fil ud, som kun kan læses af MatLab. For at få det hele over i excel kan I i mappen finde en fil med navnet 'Write To Excel'. Denne loader en datafil med commandoen - load 'filename' - hvor i skal skrive navnet på den fil i gerne vil have hentet. Derefter skal i navngive filen i linje 2. De følgende linjer strukturerer overskrifter og data, og i skal ikke ændre i disse, men blot overveje, hvad der står. Kør programmet, og åben den nyeligt oprettede excel-fil.

5.2.1 Plot en partikels bane samt skridtene

Lav et plot af x,y, og husk at lave akserne i samme størrelsesorden for nemmest muligt at kunne aflæse, hvad de viser.
Er der en tendens til, at partiklen bevæger sig i en retning? Kan i forklare, hvorfor den kan have den tendens?
Plot nu tilvæksten i x-retning mod tiden. Hvad viser dette plot? Er der en bestemt tendens for skrditene i x-retningen?

5.2.2 Hvordan er kuglens skridt fordelt?

Alt i dette afsnit skal laves for både sx og sy.
Vi ønsker at undersøge, hvordan skridtenes længde er fordelt. Ved at lave et histogram med passende antal bins (prøv jer frem til i får noget, i synes ser fornuftigt ud) kan i undersøge netop dette. Forklar hvad dette histogram fortæller?

5.2.3 Variancen og Standard Afvigelsen

Variansen og standardafvigelsen er to statisktiske parametre, som kan beskrive kuglens bevægelse. De kan begge benyttes til at finde kuglens diffusionskoefficient som er den karakteristiske størrelse for kuglen, vi søger. Med karakteristisk menes, at det er en værdi, som er afhængig af kuglen. Hvis i havde valgt en anden størrelse kugle, ville diffusionskoefficienten have været en anden. Find henholdsvis variansen og standardafvigelsen ved

brug af excels funktion for varians samt de ligninger i lærte om i teorien.
Find værdierne for henholdsvis sx og sy og skriv dem ned.

5.2.4 Find Diffusionskoefficienten og Kuglens Størrelse

Både diffusionskoefficienten og kuglens størrelse kan findes ved brug af de ligninger i læste om i teorien.

$$Var(s_x) = 2D\delta t, \qquad \sigma\left(s_x\right) = \sqrt{2D\delta t} \tag{19}$$

$$D = \frac{k_b T}{6\pi\eta R} \tag{20}$$

I kan finde viskositeten på nettet. Forsøget er lavet i vand ved stuetemperatur.
Hvilken værdi for δt er den rigtige at bruge her? Hvad var det δt betød, og hvordan hang den sammen med sx og sy?
Skriv både D og R ned, det er nogle af de vigtigste resultater.

5.2.5 Undersøgelse af Variansens afhængighed af tiden

Fra teorien ligning (9) og (10) ved vi, at variansen for sx skal stige proportionalt med tiden δt, og vi vil nu undersøge, om dette også er tilfældet. Programmet TrackerFysikLab gav vektorerne $sx, s2x, s4x, s8x$, og vi skal nu benytte disse.
Tallet 2, 4, 6, og 8, indikerer hvor mange billeder der går mellem to indtastninger i vektoren. Hvad er tiden mellem disse billeder, når der er δt mellem to billeder?
Beregn nu variansen for de fire vektorer for ændringen i x-retningen.
I skal nu lave 2 rækker med tal, en der indeholder værdierne for variansen og en med de tilhørende værdier for tiden. Plot disse mod hinanden. Lav et lineært fit i excel ved at tilføje en tendens-linje og benyt ligningerne fra teorien til at finde diffusionskoefficienten ud fra hældningen.

5.2.6 Er skridt i alle retninger lige sandsynlige?

Vi vil nu undersøge, om alle retninger er lige sandsynlige. I kan danne jer et overblik over det ved at plotte (sx,sy), men endnu bedre er følgende. Omregn jeres værdier fra kartetiske koordinater til polære koordinater. I det polære koordinatsystem er alle punkter givet ved en vinkel, kaldet θ, og en afstand fra centrum, kaldet r. Hvor MatLab har en funktion til at udføre denne omregning, skal i selv gøre det i excel. Sammenhængen mellem (x,y) og (θ,r) er givet ved:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{21}$$

Beregn en værdi for (r,θ) for alle jeres punkter. Lav nu et histogram over vinklerne, hvor i deler vinklerne fra (-π,π) op i et passende antal intervaller. Konkluder nu fra jeres histogram om alle skridt er lige sandsynlige, eller om der er en tendens til en bestemt retning.

6 Forståelsespørgsmål

- Hvad er den grundlæggende mekanisme, som gør, at Brownsk bevægelse finder sted? Hvordan kan dette bruges til at forklare plottet (x,y)?

- Hvad var den typiske længde af ét skridt, og hvor store var de længste skridt? Find svaret på jeres plots.
- Hvilken værdi fik i for diffusionskoefficienten, og hvor stor målte i kuglen til at være? Sammenlign med den faktiske størrelse på kuglen.
- Brug jeres plots til at argumentere for, at variansen bliver større med større tidsskridt (ligning (9)). Brug fysikken, og ikke matematikken, for at forklare hvorfor den opfører sig sådan.
- Er alle retninger lige sandsynlige? Hvis ja, hvordan ses det? Hvis nej, hvad kan være årsagen til, at det ikke forholder sig sådan?

Kan i svare på ovenstående, er i klar til at skrive en rapport, og i ønskes god arbejdslyst fra FysikLab-teamet, og vi håber i havde en god dag på universitetet.