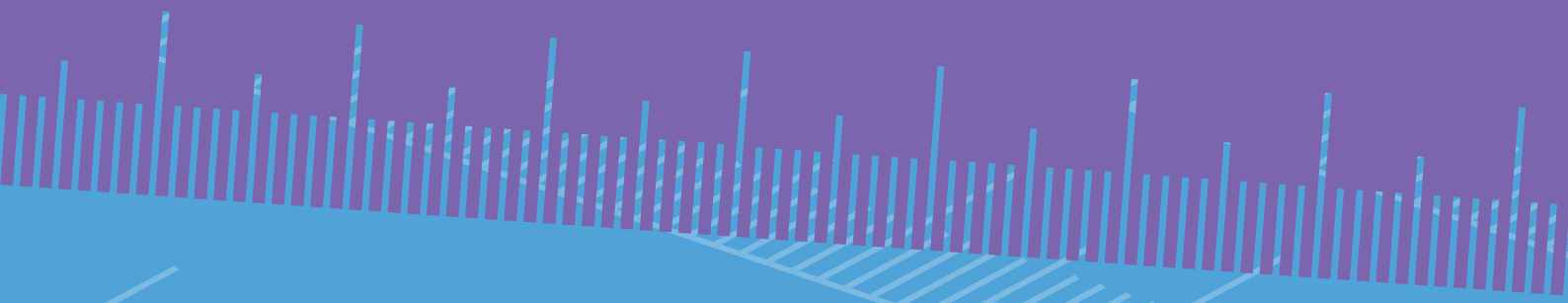
matematik

i eksponentiel vækst



Vol. 4

LSUL
Laboratorium for Samfundsbaseret Undervisning og Læring
SDU
UC SYD
Region Syddanmark

2019, 1. udgave
Forside: Michael Fabrin Hjort

Materialet er udgivet under Labmat med økonomisk støtte fra Region Syddanmarks Uddannelsespulje.

Undervisningforløbene er udviklet under Laboratorium for Sammenhængende Uddannelse og Læring (LSUL).
Tekst, billeder og materialer er udarbejdet af Claus Michelsen
Illustrationer: Colourbox

Ansvarshavende redaktør: Professor Claus Michelsen (LSUL).
Assiterende redaktør/layout/design: Michael Fabrin Hjort (LSUL).

Kontakt: lsul@sdu.dk

Der tages forbehold for fejl. Trykt hos Print & Sign, Syddansk Universitet

Materialet er tilgængeligt online på lsul.dk under menupunktet skriftserie.

ISBN: 978-87-92321-30-5

Udgivet af
Laboratorium for Sammenhængende Uddannelse og Læring (LSUL)
Syddansk Universitet
Campusvej 55
5230 Odense M
Denmark

www.lsul.dk

MATEMATIK I EKSPONENTIEL VÆKST

UDARBEJDET AF

CLAUS MICHELSEN

INTRODUKTION

Det her foreliggende hæfte Matematik med eksponentiel vækst indgår som volumen 4 i rækken af læremidler til matematikundervisningen udgivet under titlen Laboratorium for matematikundervisning af Laboratorium for Sammenhængende Uddannelse og Læring (LSUL). Laboratorium for matematikundervisning er et resultat af projektet Laboratorium for Matematikundervisning (LabMat), der er støttet af en bevilling fra Region Syddanmarks Uddannelsespulje. LabMat er et fireårigt projekt med start i 2015, der gennem systematisk og målrettet udviklingsarbejde skal styrke børn og unges kompetencer og færdigheder i matematik fra folkeskole til ungdomsuddannelser. Udviklingsarbejdet omfatter både didaktik, undervisningsforløb med læremidler, workshopaktiviteter og efteruddannelsestiltag, hvor uddannelsesforskere, fagprofessionelle og lærerstuderende inden for rammen af autentiske undervisningsmiljøer afprøver, udveksler og evaluerer nye undervisningsinitiativer matematik i fællesskab.

LabMat fungerer som en motor for en omfattende nytænkning af matematikundervisningen med afsæt i en didaktisk ramme, der prioriterer en undersøgelsesbaseret og anvendelsesorienteret tilgang til matematik og til matematiks samspil med andre fagområder, herunder naturfagene. Nytænkningen omfatter en vision om en ophævelse af den faglige og didaktiske adskillelse af matematik og naturfag i grundskolen og ungdomsuddannelser. LabMats tiltag skal bringe undervisningen på alle niveauer i nærmere overensstemmelse med den praktiske anvendelse af matematiske kompetencer, og derved fremme de unges forudsætninger og interesse for naturfagene og de tekniske erhvervsuddannelser, hvorved rekrutteringsgrundlaget for regionens fremtidige arbejdskraft inden for naturvidenskab kan styrkes. Udviklingsteams af forskere, lærere og studerende har i fælleskab med afsæt i den såkaldte IBSME[1]-metode udviklet konkrete undersøgelsesbaserede og anvendelsesorienterede undervisningsforløb på tværs af grundskolen og ungdomsuddannelserne til gavn for de dygtigste elever, middelgruppen og i særdeleshed de elever, som er i matematikvanskeligheder.

1 IBSME er akronym for Inquity Based Science and Mathematics Education. Se fx Michelsen, C. (2011). IBSME – inquiry-based science and mathematics education. MONA - Matematik- og Naturfagsdidaktik 6(3), 72-77.

Matematik med eksponentiel vækst er udviklet til længerevarende forløb om eksponentielle vækstfunktioner på gymnasialt niveau, men kan forhåbentlig også inspirere til lignende forløb i grundskolens ældste klasser. Materialet har et dobbelt fagligt formål, idet den på den ene side skal introducere eleverne til og give dem erfaringer med det centrale matematiske begreb eksponentielle vækstfunktioner og på den anden side styrke eleverne modelleringskompetence gennem tværfaglige forløb med fysik og biologi. Der forudsættes ikke kendskab til eksponentielle vækstfunktioner. Tværtimod er det ideen at følge den hollandske matematikdidaktiker Hans Freudenthals begreb guided genoptagelse, hvor matematiklæring ses som en proces, hvor eleverne af læreren guides til genopdage matematiske begreber på en måde, der minder om den proces som begreber oprindelig blev konstrueret gennem[2].

Matematik med eksponentiel vækst består af en række kontekstproblemer, der fungerer som en kilde til elevernes læringsproces. Kontekstproblemerne er situationer fra matematik, fysik og biologi, der inviterer eleverne til at anvende matematik og specielt eksponentielle vækstfunktioner til at beskrive, analysere og forstå situationer og fænomener. Under arbejdet med kontekstproblemerne udvikler eleverne deres matematiske forståelse og udvider deres matematiske værktøjskasse. Kontekstproblemerne skal invitere eleverne til at gennemføre matematiske undersøgelser i smågrupper og senere at dele deres ideer og resultater med resten af klassen. Med udgangspunkt i en konkret problemstilling skal eleverne gives mulighed for at arbejde sig frem til en løsning. Målet er, at eleverne på baggrund af deres analyse af problemstillingen konstruerer matematiske modeller, der kan bidrage til en løsning af problemet. Samtidig skal elevernes matematiske modeller fungere som et medium, der giver eleverne mulighed for at engagere sig i aktiviteter, hvor de læringsmæssigt bevæger sig fra konkrete situationer mod mere generelle og abstrakte ideer. Herved kommer kontekstproblemerne til at tjene som som et motivations og konceptuelt anker, der både støtterudviklingen af og udgør en del af elevernes matematiske forståelse.

2 Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

INDHOLD

		Side
INTRODUKTION		**2**
1	**RADIOAKTIVITET**	**7**
1.1	HVAD VED JEG OM RADIOAKTIVITET?	9
1.2	HENFALDSPROCESSEN	10
1.3	SIMULATION AF DEN RADIOAKTIVE HENFALDSPROCES	12
1.4	KONSTRUKTION AF EN MATEMATISK MODEL FOR RADIOAKTIVT HENFALD	14
1.5	UDFORSKNING AF HENFALDSPROCESSEN VED HJÆLP AF MODELLEN	16
1.6	FREMLÆGGELSE AF MODEL	17
1.7	NED I DYBET TIL DELFINERNE	18
1.8	FALMENDE BLÅ JEANS	20
1.9	COMPUTERENS VÆRDI	22
1.10	GRAFUNDERSØGELSE	23
1.11	AFSLUTNING AF KAPITEL 1	24
2	**SMITTESPREDNING**	**25**
2.1	SMITTESPREDNING I KLASSEVÆRELSET	26
2.2	KONSTRUKTION AF EN MATEMATISK MODEL FOR SMITTESPREDNING	28
2.3	UDFORSKNING AF SMITTESPREDNING VED HJÆLP AF MODELLEN	30
2.4	FREMLÆGGELSE AF MODEL	31
2.5	BAKTERIE VÆKST	32
2.6	LUFTTRYK	34
2.7	INVESTERINGER	35
2.8	SVØMMEDYKKERE	36

2.9 TABELLER 37

2.10 GRAFUNDERSØGELSE 39

2.11 GAMMASTRÅLER 40

2.12 AFSLUTNING AF KAPITEL 2 41

3 MATEMATISKE MODELLER 43

3.1 MODEL FOR DEN RADIOAKTIVE HENFALDSPROCES 46

3.2 STRONTIUM-90 48

3.3 HALVERINGSTID 49

3.4 MODEL FOR SMITTESPREDNING 51

3.5 UNDERSØGELSE AF EKSPONENTIEL VÆKST 52

3.6 FREMLÆGGELSE AF MODEL 57

3.7 CARBON-14 DATERING 58

3.8 KØLERVÆSKE 60

3.9 AFSLUTNING AF KAPITEL 3 61

4 EKSPERIMENTER 63

4.1 EKPERIMENTER MED RADIOAKTIVITET 65

4.2 AKTIVITET 67

4.3 GAMMASTRÅLER 68

4.4 SØLVAKTIVERING 69

4.5 EKSPONENTIALFUNKTIONER 71

4.6 ENKELTLOGARITMISK KOORDINATSYTEM 72

4.7 NEWTONS AFKØLINGSLOV 73

4.8 ALGER I KYSTOMRÅDER 75

4.9 AFSLUTNING AF KAPITEL 4 77

5	**FUNKTIONER**	**79**
5.1	TREKANTENS AREAL	82
5.2	FUNKTIONER PÅ TABEL FORM	83
5.3	SAMMENLIGNING AF LINEÆR OG EKSPONENTIEL VÆKST	84
5.4	DET AFTAGENDE KVADRAT	85
5.5	FUNKTIONSTILVÆKST	87
5.6	FREMLÆGGELSE AF MODEL	89
5.7	SAMMENLIGNING AF FORSKELLIGE TYPER AF FUNKTIONER	90
5.8	FORTÆL OM FUNKTIONER	91
5.9	BROMKONCENTRATION	92
5.10	RADIOAKTIV HENFALDSKÆDE	93
5.11	AFSLUTNING AF KAPITEL 5	95

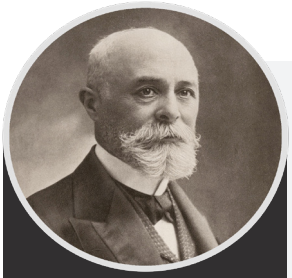
1 RADIOAKTIVITET

I november 1895 beskrev tyskeren Wilhelm Konrad Röntgen (1845-1923) opdagelsen af røntgenstråling. Röntgen havde observeret, at når man sendte en elektrisk strøm gennem et udpumpet glasrør, så fremkom der en gennemtrængende stråling. Röntgen var umiddelbart ikke i stand til at gøre rede for strålingen, og han kaldte den derfor X-stråling (x er jo det symbol, der normalt anvendes for en ukendt størrelse i matematik). I dag ved vi, at X-stråling/røntgenstråling er elektromagnetisk stråling ligesom lys, og at den fremkommer ved, at elektronerne i den elektriske strøm udsender stråling når de nedbremses ved sammenstødet med glasrøret.

Franskmanden Henri Becquerel (1852-1908) beskæftigede sig også med X-stråler. Becquerel mente, at det kunne være X-stråling, der optrådte, når uranmineraler efter lyspåvirkning fortsatte med at med at lyse. Becquerel undersøgte denne fosforescens fra mineraler ved at udsætte dem for sollys, og derefter registrerede han strålingen på en fotografisk film ved at lade mineralet ligge oven på en indpakket fotografisk plade. På grund af en længere periode med gråvejr i februar 1896 glemte Becquerel imidlertid at udsætte nogle mineralkrystaller for sollys, og de blev efterladt oven på en indpakket fotografisk plade. Denne tilfældighed skulle føre til opdagelsen af radioaktivitet. Becquerel berettede senere på året om, hvad der hændte:

Den 26. og 27. februar var sollyset imidlertid så uregelmæssigt, at jeg måtte stoppe alle eksperimenter, og efterlade dem parat til senere brug ved at placere urankrystallerne på nogle indpakkede plader i en kommodeskuffe. Solen dukkede ikke op de følgende dage, og jeg fremkaldte pladerne den 3 marts i forventning om kun at finde svage billeder. Men stik imod mine forventninger viste det sig, at der var meget intensive silhouetter.

Fra den 3.marts til den 3.maj blev krystallerne opbevaret i et blyboks placeret i et mørkt rum. Selv under disse betingelser fortsatte krystallerne med at udsende stråling. Alle de urankrystaller jeg nu har studeret, uanset om de har været udsat for lys eller ej, eller om de har været i en opløsning, gav det samme resultat. Jeg er derfor kommet til den konklusion, at den effekt, der her er observeret, må være en egenskab ved uran i disse mineraler.



Henri Becquerel
Foto: Paul Nadar Birth/Public domain

Den gennemtrængende stråling som Becquerel havde observeret kunne altså ikke skyldes fosforescens, idet uranmineralet slet ikke havde været udsat for lyspåvirkning. Becquerel sluttede heraf, at det var grundstoffet uran, der var årsag til strålingen. I de følgende år blev strålingen da også kendt under navnet rayons uranique.

Det viste sig dog hurtigt, at andre grundstoffer end uran kunne frembringe denne form for stråling. I 1898 opdagede den polsk-franske fysiker Marie Sklodowska Curie (1867-1934), at grundstoffet thorium udsendte den samme type stråling, og sammen med sin mand Pierre Curie (1859-1906) opdagede hun grundstoffet radium, der er millioner af gange mere aktivt en uran. Samme år gav Curie fænomenet dets moderne navn, idet hun kaldte evnen til at udsende stråling radioaktivitet (fra latin, hvor radius betyder stråle og activus betyder virksom).



Marie S. Curie
Foto: Nobel Prize Foundation/ Public domain

Både Becquerel og ægteparret Curie modtog i 1903 Nobelprisen i fysik for deres opdagelser. Du kan på Nobel Foundations website finde en oversigt med biografi over vindere af Nobelprisen, og du kan således finde flere oplysninger om Becquerel og Curie:

https://www.nobelprize.org/prizes/

I dag forstår vi ved radioaktivitet den egenskab ved nogle grundstofkerner, at kernen spontant kan omdanne sig, eventuelt til et helt nyt grundstof, samtidig med at der udsendes stråling enten i form af elektromagnetisk stråling eller partikler. Når vi taler om radioaktive stoffer, så handler det om stoffer, der består af atomer, hvis kerner er ustabile. En ustabil kerne kan afgive energi i form af stråling. Den proces hvor kernen ændres fra en ustabil til en mere stabil tilstand kaldes radioaktivitet eller den radioaktive henfaldsproces.

Som du sikkert ved, så består atomkernen af partikler, protoner og neutroner. Når man beskæftiger sig med kerneprocesser, som f.eks. radioaktivt henfald, så karakteriserer man gerne atomkernen ved antallet af protoner og neutroner, og man bruger betegnelsen nuklid. F.eks. så betegnes det plutonium nuklid, der indeholder 239 kernepartikler (94 protoner og 145 neutroner) plutonium-239.

1.1 HVAD VED JEG OM RADIOAKTIVITET?

Du har sikkert hørt om radioaktivitet før, f.eks. i medierne, i forbindelse med fysik-kemi undervisningen i folkeskolen osv. Angiv, gerne i stikordsform, hvad du på nuværende tidspunkt ved om emnet kerner og radioaktivitet.

Søg selv efter information om radioaktivitet på nettet og angiv disse i kortfattet form med kildeangivelsen i boksen nedenfor (web-adresse, institution/organisation/forening e.lign).

1.2 HENFALDSPROCESSEN

Når kernen i et radioaktivt grundstof udsender stråling, siger man, at den henfalder. Det betyder ikke, at den bare forsvinder, men at den omdanner sig, eventuelt til en kerne i et andet grundstof, samtidig med, at der udsendes stråling. F.eks. så vil carbon-14 henfalde til nitrogen.

Forsøger man, at forstå henfaldsprocessen ud fra den enkelte atomkernes perspektiv, kan der siges følgende: Alle kerner i et bestemt radioaktivt nuklid har den samme og konstante sandsynlighed for at henfalde indenfor et fast tidsrum.

a) Sandsynligheden for at en plutonium-239 kerne henfalder i løbet af et år er 0.00002888. Hvad er sandsynligheden for at en plutonium-239 kerne ikke henfalder i løbet af et år?

b) Sandsynligheden for at en carbon-14 kerne henfalder i løbet af et år er 0.0001208. Hvad er sandsynligheden for at en carbon-14 kerne ikke henfalder i løbet af et år?

c) Sandsynligheden for at en argon-42 henfalder i løbet af et år er 0.02079. Hvad er sandsynligheden for at en argon-42 kerne ikke henfalder i løbet af et år?

d) Sandsynligheden for at en thorium-90 kerne henfalder i løbet af et år er 0.3057. Hvad er sandsynligheden for at en thorium-90 kerne ikke henfalder i løbet af et år?

e) Hvis du havde 1 kg thorium-90 ved årets start, hvor meget ville du så forvente at have tilbage ved årets udgang?

f) Overvej hvad der vil ske med strålingen fra et radioaktiv nuklid efterhånden som tiden går. Vil den være uændret, vokse eller aftage? Begrund dit svar.

1.3 SIMULATION AF DEN RADIOAKTIVE HENFALDSPROCES

Du skal nu undersøge den radioaktive henfaldsproces ved at simulere processen. Det gør du ved at forestille dig følgende: I et bestemt tidsrum (hvert år, hver time, hvert minut,..) kaster hver af kernerne i et radioaktivt stof en terning. Hvis terningkastet giver et bestemt antal øjne, så henfalder kernen, ellers lever kernen videre og kan kaste terning igen i næste tidsrum.

Her er reglerne for eksperimentet *simulation af den radioaktive henfaldsproces*:

1. Hver gang en terning kastes, så repræsenterer det et bestemt tidsrum, der anvendes som enhed for tiden i dette eksperiment.
2. Hvis terningkastet giver en sekser, så henfalder kernen, og den deltager ikke længere i simulationen.
3. Ved starten af eksperimentet repræsenterer hver elev i klassen 30 kerner.
4. I den første tidsperiode kaster hver elev terningen 30 gange, en gang for hver kerne. I den næste tidsperiode kaster hver elev kun terningen for de kerner, der overlevede i den foregående tidsperiode osv. Altså i en bestemt tidsperiode deltager kun de kerner, der overlevede foregående tidsperiode.
5. Alle elever følger deres kerner i 12 tidsperioder. Efter hver tidsperiode noteres det, hvor mange kerner, der har overlevet.

Når eksperimentet er afsluttet indskrives resultaterne fra hver enkelt elev i et skema som nedenstående, og for hver tidsperiode sammentælles antallet af overlevende kerner, der betegnes N, samt ændringen i antallet af overlevende kerner i forhold til foregående tidsperiode, der betegnes ΔN (NB: Skal du f.eks. den værdi af ΔN der svarer til t = 2, så skal du tage antallet af kerner til t =3, og fratrække antallet af kerner til t=2)

På baggrund af skemaet på næste side skal du tegne en (t,N)-graf og en (N,ΔN)-graf. Hvad vil du på baggrund af disse grafer konkludere om den radioaktive henfaldsproces?

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	N	ΔN
0	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30			
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														
11														
12														*

1.4 KONSTRUKTION AF EN MATEMATISK MODEL FOR RADIOAKTIVT HENFALD

I denne øvelse fortsættes undersøgelsen af den radioaktive henfaldsproces. Målet er at opstille en matematisk beskrivelse, en såkaldt matematisk model, af den radioaktive henfaldsproces. Dvs. der skal konstrueres tabeller, tegnes grafer og opstilles formler, der kan give informationer om henfaldsprocessen, f.eks. hvor mange kerner der henfalder i løbet af et tidsinterval, hvor mange kerner der er tilbage til et vilkårligt tidspunkt o.s.v. Når du skal i gang med at opstille modellen, kan du anvende dit matematikprogram, og du kan tage udgangspunkt i de erfaringer du har indhøstet i forbindelse med ovenstående "forsøg" med terninger.

Lad ligesom i øvelse 1.3 t betegne tiden, N antal kerner og ΔN ændringen i antallet af overlevende kerner i forhold til foregående tidsperiode.

a) Forestil dig at du har 1000 kerner af samme type som i "forsøget" med terninger ovenfor. Opstil en tabel, hvor du til ethvert tidspunkt har antallet af kerner, der er tilbage og antallet af kerner, der er henfaldet inden for hvert tidsrum. Brug lommeregneren til at få tegnet relevante grafer.

b) Forestil dig nu, at du skal gentage "forsøget" med terninger blot med den ændring, at der nu er to terninger, der kastes, og at en kerne kun henfalder, når terningen viser to seksere. Ligesom i a) undersøg dette henfald ved hjælp af passende tabeller og grafer. Forestil dig derefter, at terningerne udskiftes med to mønter, og at en kerne kun henfalder, når begge mønter viser plat, og undersøg så dette henfald.

c) Forestil dig til sidst, at du har et helt vilkårligt antal kerner fra et vilkårligt radioaktivt nuklid (lad N_o angive antallet af kerner til t=0):

- Skitser en (t,N)-graf og en (N, ΔN)-graf for denne vilkårlige henfaldsproces.

- Beskriv hvordan du vil opstille en tabel i lommeregneren, hvor du kan bestemme ændringen i antallet af kerner i en tidsperiode, samt bestemme antallet af kerner kan bestemmes til et vilkårligt tidspunkt

- Opstil generelle formler for hvordan ændringen i antallet af kerner i en tidsperiode kan bestemmes, samt for hvordan antallet af kerner kan bestemmes til et vilkårligt tidspunkt.

1.5 UDFORSKNING AF HENFALDSPROCESSEN VED HJÆLP AF MODELLEN

a) Når en radioaktiv henfaldsproces skal beskrives, anvender man ofte halveringstiden, der er det tidsrum hvori antallet af kerner forventes at blive halveret. Bestem halveringstiden for hvert af dine "forsøg" ovenfor.

b) Hvilket resultat ville du forvente for halveringstiden i hvert af dine "forsøg", hvis du havde startet med 50 kerner? 2000 kerner? En million kerner? Begrund dit svar

c) Hvilken indflydelse har antallet af kerner i det radioaktive stof på halveringstiden?

d) Fysikere anvender normalt halveringstiden i stedet for at angive det tidspunkt, hvor alle kerner er henfaldet. Prøv at give et velbegrundet bud på, hvorfor de gør det.

1.6 FREMLÆGGELSE AF MODEL

Resultaterne af dit arbejde med den radioaktive henfaldsproces skal nu fremlægges for klassen. Sammen med din gruppe skal du udfærdige en kort beskrivelse af jeres arbejde (hvordan kom I i gang, hvilke ideer fik I undervejs, hvor kørte I "fast", osv). Skriv til sidst en konklusion indeholdende mindst 5 punkter, hvor I angiver de vigtigste resultater af jeres arbejde, samt eventuelle uafklarede spørgsmål, som I måtte ønske at få diskuteret.

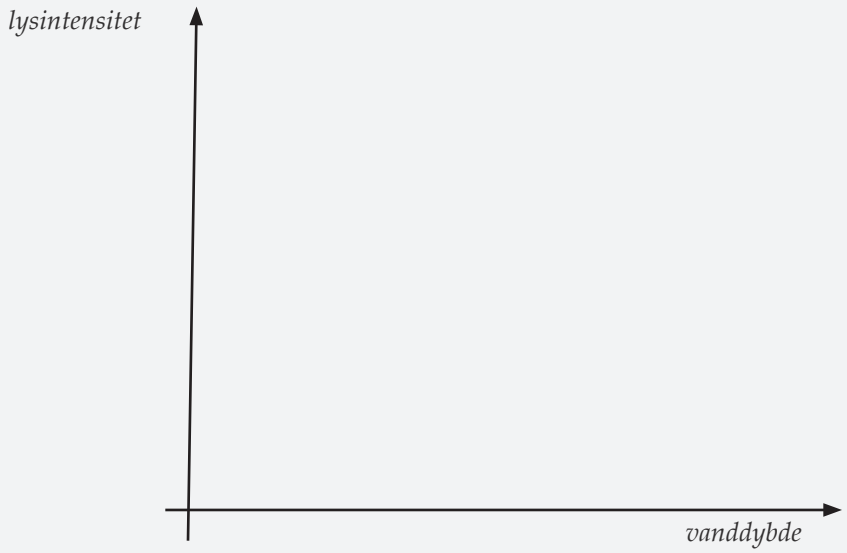
1.7 NED I DYBET TIL DELFINERNE



På billedet til højre ser du en venlig delfin, der poserer for en undervandsfotograf. Som du sikkert ved, så ændres lysintensiteten med vanddybden, hvis vi dykker fra vandoverfladen og ned i dybet til delfinerne. I denne opgave skal du forsøge, at finde en sammenhæng mellem lysintensiteten og vanddybden.

a) Beskriv kort hvordan du forventer, at lysets intensitet ændres med vanddybden.

b) Skitser nedenfor en mulig graf for den sammenhæng, som du ovenfor beskrev.



c) Beskriv kort årsagen til ændringerne i lysintensiteten, når vi dykker ned til delfinen.

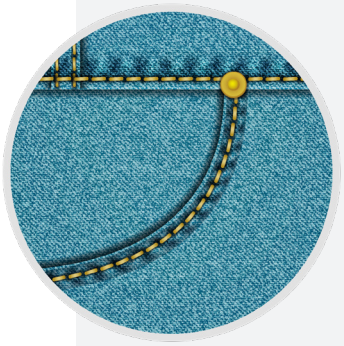
d) Tabellen nedenfor viser resultaterne (uden enhedsangivelse lysintensiteten, da denne er underordnet her) fra en måling af lysintensiteten i forskellige vanddybder:

Vanddybde/m	0	1	2	3	4	5	6	7
Lysintensitet	0.810	0.472	0.242	0.154	0.089	0.054	0.031	0.017

e) Opstil nu på baggrund af dine egne overvejelser og resultaterne fra skemaet ovenfor en model, der beskriver sammenhængen mellem vanddybden og lysintensiteten. Beskriv kort hvordan du opstiller modellen (hvilke overvejelser gør du dig? kan du anvende noget du tidligere har arbejdet med?)

f) Kan den model du her har opstillet anvendes til at beskrive andre ting end sammenhængen mellem vanddybden og lysintensiteten?

1.8 FALMENDE BLÅ JEANS



Afhængigt af hvilken proces fabrikken anvender til farvning vil noget tøj falme betydeligt som tiden går. Specielt blå jeans falmer hurtigt. Antag, at du har et par blå jeans, der hver gang du vasker dem, mister 4% af den farve, de havde lige før de blev vasket.

a) Hvor mange procent af buksernes oprindelige farve er der tilbage efter 1. vask? Efter 2. vask? Efter 3. vask?….? Forklar hvordan du når frem til resultaterne.

b) Placer dine resultater fra a) i en tabel. Udfyld tabellen, så du kan aflæse hvor mange procent af den oprindelige farve, der er tilbage efter 15. vask og efter 20. vask.

c) Tegn en graf der viser sammenhængen mellem hvor mange gange bukserne er vasket, og hvor mange procent af den oprindelige farve, der er tilbage.

d) Opstil en formel, der angiver sammenhængen mellem mange gange bukserne er vasket, og hvor mange procent af den oprindelige farve, der er tilbage.

e) Hvor mange gange skal bukserne vaskes, for at der er 20 % af den oprindelige farve tilbage?

f) Hvor mange procent farve mister bukserne, hvis de vaskes 3 gange? 5 gange?

1.9 COMPUTERENS VÆRDI



En ny computer købes den 1.januar 2018 for 9.995 kr. Køberen regner med, at computerens værdi hvert år vil reduceres med 25%.

a) Hvad er computerens værdi den 1. januar 2019? 1. januar 2020?

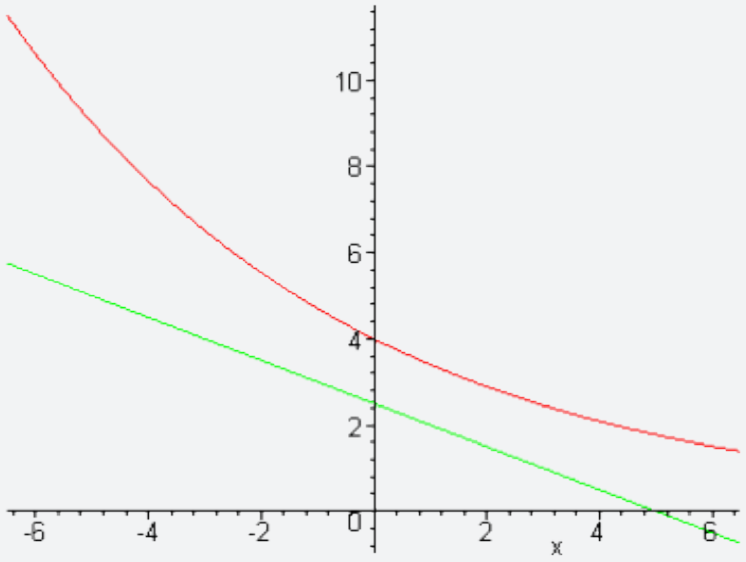
b) Opstil en tabel, så du kan følge computerens værdi mindst 15 år frem i tiden. Forklar hvordan du konstruerer tabellen. Hvad er computerens værdi efter 5 år? Hvornår er computerens værdi mindre end 1000 kr.? Hvornår er computeren værdiløs?

c) Opstil en formel, så du til et vilkårligt tidspunkt kan bestemme computerens værdi.

d) Hvilke ændringer skal der foretages i ovenstående, hvis det viser sig, at computerens værdi falder med 35% om året? Med 8% pr. kvartal? Med 2% pr. måned?

1.10 GRAFUNDERSØGELSE

Nedenfor er to grafer indtegnet i det samme (x,y)-koordinatsystem. Dvs du har i to tilfælde en sammenhæng mellem to størrelser x og y. Du skal i denne øvelse forsøge med egne ord at gøre rede for de to sammenhænge:



a) Opstil for begge grafer en tabel, der indeholder sammenhørende værdier for y og Δy, hvor Δy er tilvæksten i y-værdien, når x-værdien øges med 1. Tegn derefter de to tilhørende $(y,\Delta y)$-grafer.

b) Forklar på baggrund af graferne og tabellerne, for hver af de to tilfælde, hvad det er for en sammenhæng mellem x og y, der beskrives. Sammenlign også de to tilfælde.

c) Konstruer selv to eksempler på lignende sammenhænge mellem to størrelser.

1.11 AFSLUTNING AF KAPITEL 1

Skriv et kort referat af dine aktiviteter i forbindelse med dette tema om radioaktivitet. Referatet skal afsluttes med en konklusion om, hvad du synes er de vigtigste resultater af dit arbejde med temaet. Du har desuden mulighed for at fremsætte såvel kritik og som spørgsmål vedrørende temaet, samt give forslag til ændringer mm.

2 SMITTESPREDNING

Ved smitsomme sygdomme overføres sygdomsfremkaldere f.eks. ved bakterier eller virus fra en person til en anden. Smitte kan finde sted ved både direkte kontakt, f.eks. berøring, ved indirekte kontakt eller ved overførsel af insekter, som det f.eks. er tilfældet med malaria. Sunde smittebærere kan huse sygdomsforvolderen uden selv at blive angrebet, men kan overføre denne til andre individer.

Findes en sygdom samtidig hos et stort antal patienter, taler man om en epidemi. I Danmark taler man først om en epidemi, når antallet af nye tilfælde fordobles i løbet af en uge.

a) Antag, at der i en bestemt uge er 25 elever, der er smittet af influenza, samt at sygdommen udvikler sig til en epidemi. Beskriv ved hjælp af tekst, graf(er), tabel eller formler, hvordan du vil forvente, at epidemien udvikle sig i løbet af de efterfølgende 4 uger.

b) Beskriv kort hvilke overvejelser, du gjort dig i forbindelse med besvarelsen af a). Hvilke antagelser gjorde du? Er din besvarelse realistisk? osv.

2.1 SMITTESPREDNING I KLASSEVÆRELSET



I denne øvelse vil vi simulere smittespredning i klasseværelset. Vi antager, at der i klassen ved timens start er præcis en elev, der er smittet af en bestemt sygdom, hvor smitten kan overøres ved direkte kontakt.

a) Alle elever i klassen udstyres med en terning og et ark til data som nedenstående:

Data for smitsom sygdom

Mit ID nummer: _____

Trin 1	Trin 2	Trin 3	Trin 4	Trin 5

	Antal smittede personer
Trin 1	
Trin 2	
Trin 3	
Trin 4	
Trin 5	

b) Alle elever udstyres med et entydigt bestemt trecifret identifikationsnummer (ID nummer). Overvej hvilken metode, der skal anvendes til udvælgelsen af ID-numrene. Alle ID-numrene skrives i numerisk orden på tavlen.

c) Nu indledes simulationen af smittespredning i klasseværelset. Den består af i alt 5 trin. I hvert trin går alle elever rundt i klasseværelset på må og få i omkring 2 minutter. Mens man går rundt, vil man tilfældigt møde nogle af de andre elever. Ved et sådant møde giver man hinanden hånd og noterer hinandens ID nummer på dataarket.

d) Ved hvert møde afgøres det endvidere, om det er et møde med risiko for smitte. Dette foregår ved, at begge elever kaster deres terning. Hvis summen af de to terningers øjental er mindre end eller lig med 5, så er der tale om et møde med risiko for smitte. Er dette tilfældet, så sættes der er stjerne ved ID nummeret på dataarket. Et møde med risiko for smitte betyder, at hvis en af eleverne er bærer af sygdommen, så er den anden elev smittet. Proceduren gentages i næste trin, og der fortsættes til der i alt er 5 trin.

e) Som nævnt er der ved indledningen af "forsøget" kun en elev, der er smittet. Denne elev skal nu udvælges. Find en passende måde at udvælge denne elev på, og marker derefter dennes ID nummer på tavlen.

g) Efter udvælgelse af kilden til smittespredningen i klassen, vil vi nu følge hvordan smitten spredes. Alle ser derfor på trin nummer 1 på arket med data, og hvis man har haft et møde med risiko for smitte med smittebæreren, så melder man sig, og ID nummeret på tavlen markeres. Når dette er gjort sammentælles antallet af smittede i trin nummer 1, og antallet skrives ind i dataarket. Proceduren gentages herefter for de 4 andre trin.

f) Tegn en graf, der viser sammenhængen mellem antal smittede personer og trin nummer. Hvad fortæller grafen dig om smittespredningen i klassen?

2.2 KONSTRUKTION AF EN MATEMATISK MODEL FOR SMITTESPREDNING

I denne øvelse fortsættes undersøgelsen af smittespredning. Ligesom vi tema 1 efter "forsøget" med opstillede en matematisk model for den radioaktive henfaldsproces, er målet her at opstille en matematisk model smittespredningen. Inden du går i gang med at opstille modellen, så bør du nøje overveje om, der er noget fra den radioaktive henfaldsproces, der minder om smittespredningen, og som du derfor kan anvende ved opstillingen af modellen for smittespredning. Lad hvert trin svare til en tidsenhed og betegn tiden med t, antal smittede med I, samt ændringen i antallet af smittede i løbet af en tidsenhed med ΔI.

a) Forestil dig, at vi stadig betragter samme sygdom som i øvelsen ovenfor, men at vi i stedet for at betragte smittespredningen i klassen, ser på smittespredning i hele skolen. Antag at der fra starten er 20 personer på skolen der er smittede. Opstil en tabel, hvor du til ethvert tidspunkt har antallet af personer, der er smittede, samt antallet af personer, der er blevet smittet inden for hvert tidsrum. Brug dit matematikprogram til at få tegnet relevante grafer (f.eks. (t,I)-graf og en (I,ΔI)-graf).

b) Forestil dig nu, at du skal gentage "forsøget" med smittespredning, men at der nu er tale om et møde med risiko for smitte hvis summen af de to terningers øjental er mindre end eller lig med 3. Antag ligesom i a), at fra starten er 20 personer på skolen, og undersøg smittespredningen i dette tilfælde ved hjælp af passende tabeller og grafer.

c) Forestil dig til sidst at du har et helt vilkårligt antal personer der er smittet af en eller anden sygdom (lad I_0 angive antallet af kerner til t=0):

Skitser en (t,I)-graf og en (I,ΔI)-graf for denne vilkårlige smittespredning.

Beskriv hvordan du vil opstille en tabel, hvor man kan aflæse ændringen i antallet af smittede personer i en tidsperiode, samt hvor antallet af smittede personer kan bestemmes til et vilkårligt tidspunkt

Opstil generelle formler for hvordan ændringen i antallet af smittede personer i en tidsperiode kan bestemmes, samt hvor antallet af smittede personer kan bestemmes til et vilkårligt tidspunkt.

2.3 UDFORSKNING AF SMITTESPREDNING VED HJÆLP AF MODELLEN

a) Når smittespredning skal beskrives, anvender man ofte fordoblingstiden, der er det tidsrum hvori antallet af personer, der er smittede, forventes at blive fordoblet. Bestem fordoblingstiden for hvert af dine "forsøg" ovenfor.

b) Hvilket resultat ville du forvente for fordoblingstiden i hvert af dine "forsøg", hvis du havde startet med 50 smittede personer? 1000 smittede personer? Begrund dit svar.

c) Hvilken indflydelse har antallet af smittede personer på fordoblingstiden?

2.4 FREMLÆGGELSE AF MODEL

Resultaterne af dit arbejde med smittespredning skal nu fremlægges for klassen. Sammen med din gruppe skal du udfærdige en kort beskrivelse af jeres arbejde (hvordan kom I i gang, hvilke ideer fik I undervejs, hvor kørte I "fast", osv). Overvej specielt hvilke ligheder og forskelle der er mellem den radioaktive henfaldsproces og smittespredningen. Skriv til sidst en konklusion på mindst 5 punkter, hvor I angiver de vigtigste resultater af jeres arbejde, samt eventuelle uafklarede spørgsmål, som I måtte ønske at få diskuteret.

2.5 BAKTERIE VÆKST

En biolog studerer en ny bakterietype. Da hun første gang ser på bakteriekulturen gennem sit mikroskop, tæller hun i alt 1000 bakterier. Ved nøje overvågning af bakteriekulturen, erfarer biologen, at den vokser med 50% hver gang, der er gået 15 minutter.

a) Opstil en der viser hvor mange bakterier der er til forskellige tidspunkter i løbet af det første 3 timer, biologen observerer kulturen.

b) Tegn en graf, der viser sammenhængen mellem antallet af bakterier og tiden.

c) Opstil en formel, der angiver sammenhængen mellem antallet af bakterier og tiden.

d) Hvor lang tid før biologen første gang studerede bakteriekulturen, var der mindre end 250 bakterier?

e) Senere i sin undersøgelse af bakteriekulturen opdager biologen, at den formerer sig hver gang, der er gået 7½ minut, men dog stadig sådan, at den vokser med 50% hver gang, der er gået 15 minutter. Hvor mange bakterier er der så 7½ minut efter, at hun første gang observerede bakteriekulturen?

f) Hvis nu biologen i stedet havde fundet ud af, at bakteriekulturen formerer sig hver gang, der er gået 3 minutter, men dog stadig sådan, at den vokser med 50% hver gang, der er gået 15 minutter. Hvor mange bakterier er der så 3 minutter efter, at hun første gang observerede bakteriekulturen?

2.6 LUFTTRYK

Som bekendt ændrer lufttrykket sig med højden over havoverfladen. På baggrund af målinger af lufttrykket p i forskellige højder, har man opstillet følgende model:

$$\Delta p = - 0{,}000119 \cdot p$$

hvor Δp er ændringen i lufttrykket når højden over havoverfladen øges med 1 meter.

En bestemt dag er luftrykket 675 mmHg i højden 990 m over havoverfladen.

a) Hvad er luftrykket i højden 1000 meter over havoverfladen den pågældende dag?

b) Hvad er luftrykket ved havoverfladen den pågældende dag?

c) Beskriv sammenhængen mellem luftrykket og højden over havoverfladen. Du kan f.eks. tegne graf(er), opstille tabel(ler), opstille formel/formler samt endvidere beskrive vigtige egenskaber ved sammenhængen.

2.7 INVESTERINGER

En bank tilbyder på en indlånskonto en fast årlig rente på 3%. Renten tilskrives på årets sidste dag. To personer, Larry og Mogens, aftaler den 1. januar i år at indsætte hver 1000 kr. på en sådan konto. Larry beslutter, at lade sit indskud samt tilskrevne renter blive stående på kontoen, mens Mogens beslutter, at hæve den tilskrevne rente hvert år og lade indskuddet stå på kontoen. De hævede renter placerer Mogens i en skotøjsæske.

a) Hvor mange penge har Larry stående på kontoen om 20 år? Forklar hvordan du finder resultatet.

b) Om 20 år vil Mogens hæve sit indskud og placere det i cigarkassen sammen de hævede renter. Hvor mange penge har Mogens i skotøjsæsken om 20 år?

c) Hvem af de 2 har foretaget den bedste investering af de 1000 kr.?

2.8 SVØMMEDYKKERE

Svømmedykkere udsættes som bekendt for et større og større tryk jo længere ned i havet de dykker. En tommelfingerregel siger, at når dybden øges med 10 meter, så øges trykket med 1 atm.

Antag at trykket ved havoverfladen er 1 atm og giv så en matematisk beskrivelse af ovenstående tommelfingerregel ved hjælp af graf, tabel eller formel.

2.9 TABELLER

Nedenfor ser du fire tabeller, der alle viser en sammenhæng mellem to størrelser x og y. Dvs. du har i fire tilfælde en sammenhæng mellem to størrelser x og y. Du skal i denne øvelse forsøge med dine ord at gøre rede for de fire sammenhænge.

a) Udfyld de tomme felter i hver af de 4 tabeller.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	100	120	144	172,8	2073,6						

Tabel 1

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	100	120	144	172,8	2073,6						

Tabel 2

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	100	120	144	172,8	2073,6						

Tabel 3

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	100	120	144	172,8	2073,6						

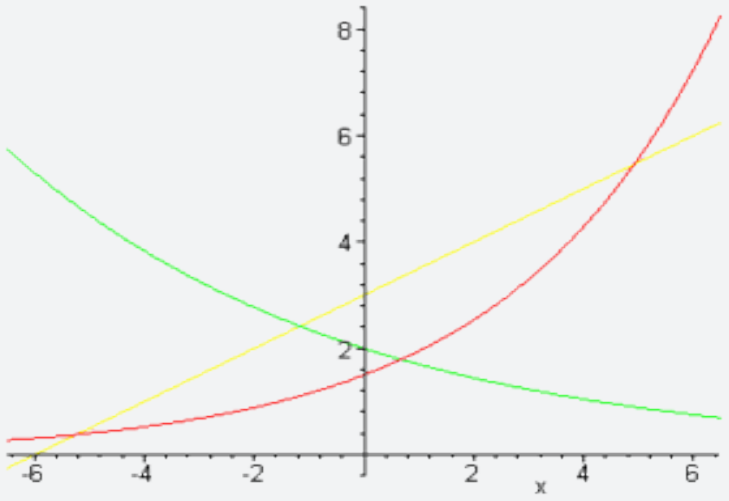
Tabel 4

b) Beskriv sammenhængen mellem x og y i hver af de 4 tabeller ved hjælp af "det skrevne ord", grafer, formler eller tabeller.

c) Opstil selv 4 tabeller som ovenstående, hvor den første tabel har de samme egenskaber som Tabel 1, den næste de samme som Tabel 2 osv.

2.10 GRAFUNDERSØGELSE

Nedenfor er tre grafer indtegnet i det samme (x,y)-koordinatsystem. Dvs. du har i tre tilfælde en sammenhæng mellem to størrelser x og y. Du skal i denne øvelse forsøge med dine ord at gøre rede for de tre sammenhænge.



a) Opstil for hver af tre grafer en tabel, der indeholder sammenhørende værdier for y og Δy, hvor Δy er tilvæksten i y-værdien, når x-værdien øges med 1. Tegn derefter de tre tilhørende $(y,\Delta y)$-grafer.

b) Forklar på baggrund af graferne og tabellerne, for hver af de tre tilfælde, hvad det er for en sammenhæng mellem x og y, der beskrives. Sammenlign også de tre tilfælde.

c) Konstruer selv tre eksempler på lignende sammenhænge mellem to størrelser.

2.11 GAMMASTRÅLER

Når en bestemt type gammastråler sendes gennem en blyvæg på 16 mm, så reduceres strålingens intensitet med 60%.

a) Hvor mange blyplader skal der til for at reducere strålingen til 5% af strålingens intensitet uden blyplader?

b) Hvor tyk skal en blyvæg være, for at den halverer strålingens intensitet?

2.12 AFSLUTNING AF KAPITEL 2

Skriv et kort referat af dine aktiviteter i forbindelse med dette tema om smittespredning.

Referatet skal afsluttes med en konklusion om, hvad du synes er de vigtigste resultater af arbejdet med dette tema. Sammenlign også resultaterne med dine resultater fra tema 1. Du kan endvidere fremsætte såvel kritik og spørgsmål vedrørende temaet, samt give forslag til ændringer mm.

3 MATEMATISKE MODELLER

En meget vigtig grund til at lære matematik, er at man bliver udstyret med nogle metoder til løsning af praktiske problemer fra virkeligheden. De problemstillinger fra virkeligheden, som man forsøger at løse ved hjælp af en matematisk beskrivelse, er ofte så komplekse, at det er er nødvendigt at simplificere og idealisere den situation, der skal beskrives. Man kalder derfor den matematiske beskrivelse en matematisk model af virkeligheden. Opstillingen og anvendelsen af en matematisk model er normalt en proces, hvor mange af trinene må gentages. Ofte kan den først opstillede model give nogle forudsigelser om den betragtede problemstilling, der kan testes ved at indsamle data. Denne test kan så føre til forbedringer af modellen og til nye forudsigelser, der igen kan testes. Ved gentagne forbedringer af modellen er det ofte muligt at opnå endog meget præcise forudsigelser om situationer fra virkeligheden. Du kan læse og lære mere om grafer i forhold til matematiske modeller i hæftet 'Matematik i vækst', hvor vi kigger mere grundlæggende på grafer, f. eks. med hensyn til befolkningsvækst og alkohol-nedbrydning.

Når problemstillinger skal analyseres ved hjælp af matematiske modeller, så vil der normalt være tre mulige matematiske metoder at angribe problemet på: *Numerisk, grafisk og symbolsk*.

Den numeriske metode anvendes ofte når der foreligger data i en tabel, som nedenstående, der befolkningstallet i millioner i England og Wales i perioden fra 1801 til 1911 viser:

År	1801	1811	1821	1831	1841	1851	1861	1871	1881	1891	1901	1911
Mill.	8.89	10.16	12.00	13.9	15.91	17.93	20.07	22.71	25.97	29.00	32.53	36.07

En meget simpel metode er, at bestemme differencen eller kvotienten mellem to på hinanden følgende kolonner. Er differencen mellem befolkningstallet i to på hinanden følgende kolonner konstant vil vi kalde væksten i befolkningstallet lineær, og vi vil kalde den eksponentiel, hvis kvotienten er konstant.

Den grafiske metode kan hjælpe os med at forstå sammenhænge mellem to

størrelser samt til at kommunikere disse sammenhænge. F.eks. kan en graf give os et overblik over hvordan befolkningstallet ændres, samt til et bestemt tidspunkt aflæse befolkningens størrelse.

Den symbolske metode, hvor der opstilles matematiske udtryk, en formel, hvori symboler repræsenterer de størrelser, der indgår i modellen. Udtrykket kan f.eks. anvendes til at beregne befolkningstørrelse til et bestemt tidspunkt eller hvor meget befolkningstallet vokser i løbet af et bestemt tidsrum. Et eksempel på dette er Thomas R. Mathus' populationsvækst formel:

$$P_t = P_o \cdot (1 + r)^t$$

Her er P_t populationens størrelse til tidspunktet t, P_o er populationens størrelse til starttidspunktet, r er den årlige vækstrate (f.eks. er r = 0.015 hvis den årlige vækst er på 1.5%) ,og t er antal år efter starttidspunktet.

En matematisk model vil normalt involvere alle de tre nævnte metoder, idet de hver for sig kan give forskellige perspektiver på problemstillingen, der undersøges. De tre metoder bør endvidere suppleres med forklaringer til og begrundelse for hvordan modellen opstilles og anvendes.

a) Undersøg om væksten i befolkningstallet i England og Wales i perioden fra 1801 til 1911 er lineær eller eksponentiel.

b) Tegn en graf, der viser hvordan befolkningstallet i England og Wales udvikler sig i perioden 1801 til 1911.

c) Opstil et udtryk der beskriver sammenhængen mellem befolkningstallet i England og Wales og tiden i perioden fra 1801 til 1911.

d) Giv eksempler på matematiske modeller. Fortæl hvor du kender modellerne fra og hvad de kan anvendes til. Brug både numerisk, grafisk og symbolsk metode til at beskrive modellerne.

e) Hvad er forskellen på lineær vækst og eksponentiel vækst?

3.1 MODEL FOR DEN RADIOAKTIVE HENFALDSPROCES

I det første kapitel arbejdede vi med den radioaktive henfaldsproces, og vi fik opstillet en matematisk model for denne proces. I den forbindelse blev der indført en række størrelser til at beskrive henfaldet af et nuklid. I nedenstående tabel finder du en oversigt over disse størrelser:

Symbol	Størrelse	Konstant/variabel
t	Tid	
N_o	Antal kerner til t = 0	
N	Antal kerner til tiden t	
ΔN	Ændring i antal kerner	
k	Sandsynlighed for henfald	
a	Fremskrivningsfaktor	
$T_{½}$	Halveringstid	

a) Gennemgå hver af rækkerne i tabellen, og overvej nøje hvad den enkelte størrelse beskriver, inddrag eventuelt eksempler fra Tema 1. Hvis du er i tvivl om en størrelse, så spørg dine kammerater eller læreren. Angiv endvidere i den tredje kolonne for hver af størrelserne, om der i det tilfælde, hvor vi betragter henfaldet af bestemt nuklid, er tale om en variabel eller en konstant.

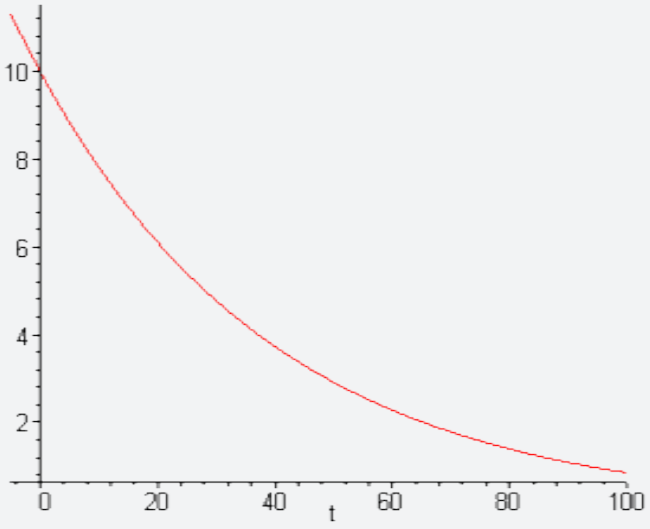
b) Hvilken sammenhæng er der mellem fremskrivningsfaktoren a og sandsynligheden for henfald k?

c) Lav en oversigt over modellen for den radioaktive henfaldsproces (angiv formler, skitser grafer, hvilke tabeller kander opstilles mm).

3.2 STRONTIUM-90

Gennem tiderne har der været mange uheld med radioaktiv stråling. Mest kendt er nok nedkastningen af de to atombomber i 1945 over Hiroshima og Nagasaki, samt ulykkerne på kernekraftværkerne i Tjernobyl i 1986 og Fukushima i 2011. Ved det sidstnævnte uheld var der et større udslip af radioaktiv stråling i atmosfæren. Selvom en del af de radioaktive stoffer i udslippet henfalder hurtigt, vil det for andre tage mange år før de er henfaldet til et sikkert niveau. Vi skal i denne øvelse, se på et radioaktivt nuklid, der er længe om at henfalde.

Strontium-90 er et radioaktivt nuklid. Grafen nedenfor viser hvordan 10 mg af dette nuklid vil aftage over en periode på 100 år.



Hvilke oplysninger om det radioaktive nuklid Strontium-90 giver grafen dig (fortæl, aflæs, opstil tabel(er) og formel/formler, tegn grafer og forklar)?

3.3 HALVERINGSTID

I kapitel 1 blev halveringstiden for et radioaktivt nuklid, som det tidsrum hvori antallet af kerner halveres. Vi skal i denne øvelse se nærmere på halveringstiden.

a) Vi forestiller os, at vi har 100 g af et radioaktivt nuklid med en halveringstid på 1 time. Henfaldet af dette nuklid kan f.eks. beskrives ved følgende model:

$$\mathbf{N = 100 \cdot 0.5^t} \qquad (3.3a)$$

Opstil en tabel der angiver sammenhørende værdier af t og N, og tegn derefter (t,N)-grafen. Hvad sker der med værdien af N når t øges med 1?

b) Tilpas nu tabellen, så der efter 5 år er 50 gram af stoffet tilbage, dvs. halveringstiden nu er 5 år, og tegn grafen. Sammenlign denne graf med grafen fra a). Hvordan skal modellen for N (3.3a) se ud nu? Tilpas derefter tabellen så halveringstiden nu er 25 år. Hvordan ser modellen for N ud nu? Sammenlign med de to foregående grafer. Kan udtrykket $N = N_o \cdot a^t$ omskrives, så halveringstiden indgår?

c) I øvelse 1.2 i kapitel 1 blev der angivet for en række radioaktive nuklider angivet værdien for henfaldskonstanten, og i Databøger kan du finde en oversigt over halveringstider. Hvilken sammenhæng er der mellem halveringstiden $T_{½}$ og henfaldskonstanten k? Kan sammenhængen beskrives ved en formel/graf/tabel?

3.4 MODEL FOR SMITTESPREDNING

Modellen for den radioaktive henfaldsproces er et eksempel på det, der kaldes eksponentielt aftagende funktioner, mens smittespredning, som vi beskæftigede os med i kapitel 2, er et eksempel på eksponentielt voksende funktioner.

a) Opstil nu en tabel som i øvelse 3.2, men i dette tilfælde for modellen for smittespredning. Besvar de samme spørgsmål som i øvelse 3.2, men nu for modellen for smittespredning.

b) I øvelse 3.3 undersøgte vi halveringstiden - eller halveringskonstanten som den også kaldes. Ved eksponentiel voksende funktioner anvender man ikke halveringstiden, men fordoblingstiden (eller fordoblingskonstanten). Foretag her en undersøgelse af fordoblingskonstanten, som den du foretog af halveringskonstanten i øvelse 3.3.

3.5 UNDERSØGELSE AF EKSPONENTIEL VÆKST

Som bekendt kan en lineær sammenhæng angives med udtrykket $y = ax + b$, hvor a og b bestemmer henholdsvis stigningstallet og skæringen med koordinatsystemets 2.akse. Målet med denne øvelse er, at finde nogle af de vigtige egenskaber ved eksponentiel vækst, der kan angives med udtrykket $y = ab^x$, hvor a>0 og b>0.

For hver af nedenstående seks eksponentielle vækst udtryk, samt sammenhænge af samme type som du selv har valgt, skal du lave en tabel samt en graf. Vælg hver tabel så x-værdierne varierer fra –7 til 7. Anvend informationen fra tabellen, når du skal tegne graferne.

$y = 0.6^x$	$y = 4 \cdot 0.6^x$	$y = 8 \cdot 0.6^x$
$y = 2.3^x$	$y = 4 \cdot 2.3^x$	$y = 8 \cdot 0.6^x$

Sammenhænge du selv har valgt (mindst 4):

$y =$	$y =$	$y =$
$y =$	$y =$	$y =$

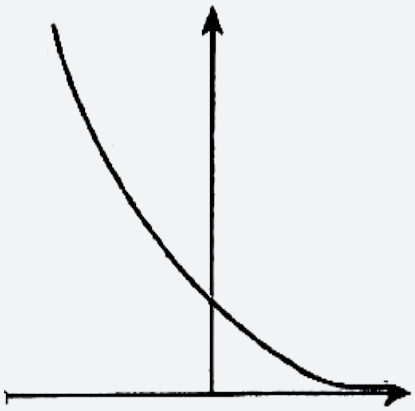
Nedenfor finder du nogle vejledende spørgsmål, der kan hjælpe dig i dine undersøgelse af eksponentiel vækst.

1. Beskriv forholdet mellem variablen x og variablen y:
   - a) I hvilke tilfælde vil y altid vokse når x vokser?
   - b) I hvilke tilfælde vil y altid aftage når x vokser?
   - c) Hvilke fælles egenskaber ved tilfældene fra a) kan være årsag til, at y altid vokser når x vokser ? Hvilke fælles egenskaber ved tilfældene fra b) kan være årsag til, at y altid aftager når x vokser?

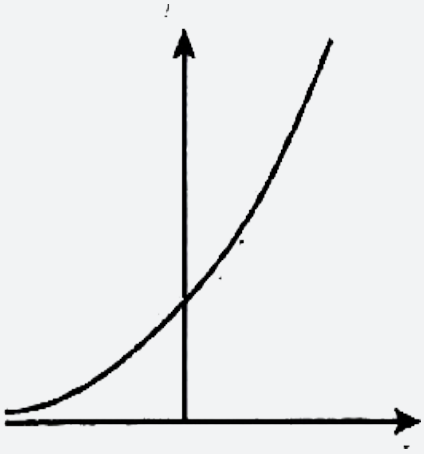
2. Findes der værdier for den uafhængige variabel, for hvilke mindst to af funktionerne har samme funktionsværdi? Hvis det er tilfældet, kan du så forklare hvorfor, dette er tilfældet?

3. Beskriv ved hjælp af tabellerne betydningen af værdien af b for funktionsværdierne.

De følgende spørgsmål skal hjælpe dig til at undersøge sammenhængen mellem formen på grafen for en eksponentiel vækst og udtrykket $y = ba^x$.



Graf 1



Graf 2

4. Betragt ovenstående grafer.

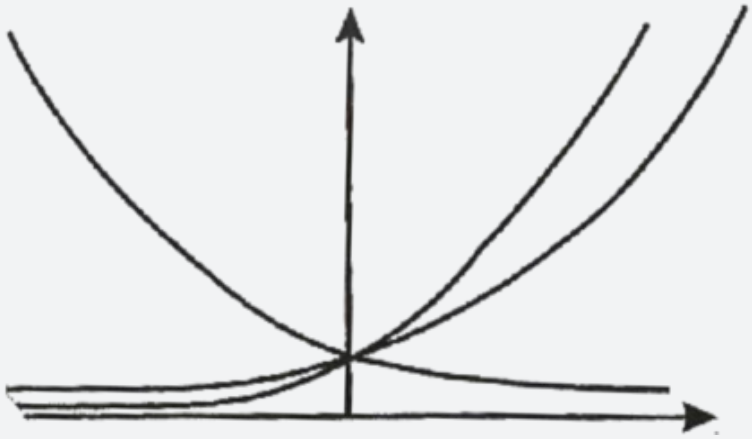
   a) Hvilke værdier for a og b giver grafer, der har form som graf 1?

   b) Hvilke værdier for a og b giver grafer, der har form som graf 2?

5. Hvilken betydning har værdien af a for grafens form? Begrund dit svar.

6. Hvilken betydning har værdien af b for grafens form? Begrund dit svar.

7. Betragt nedenstående skitse af graferne for tre forskellige tilfælde af eksponentielle vækst. Da det er grafernes form, der her er i søgelyset, er der ikke angivet enheder på koordinatsystemets akser. Beskriv hvilke forskelle der kan være i udtrykket $y = ba^x$ for de tre tilfælde.



8. Betragt de to tilfælde af eksponentiel vækst

$y = a^x$ og $y = c^x$,

hvor a og c er to forskellige positive tal.

a) Antag $1<a<c$: Hvilket af de to tilfælde vokser hurtigst når x vokser?

b) Antag $c<a<1$: Hvilket af de to tilfælde aftager hurtigst når x vokser?

9. Betragt de to tilfælde af eksponentiel vækst $y = ba^x$ og $y = ca^x$. Hvis a, b og c er forskellige positive tal, og $b>c$, hvad kan du så sige om graferne for de to tilfælde?

10. På baggrund af dine undersøgelser af sammenhænge af typen $y = ba^x$ skal du angive de egenskaber, som du mener karakteriserer sammenhænge af denne type.

3.6 FREMLÆGGELSE AF MODEL

Resultaterne af dit arbejde med modellen for eksponentiel vækst skal nu fremlægges for klassen. Sammen med din gruppe skal du udfærdige en kort beskrivelse af jeres arbejde (hvordan kom I i gang, hvilke ideer fik I undervejs, hvor kørte I "fast", osv.). Overvej specielt hvilke ligheder og forskelle der er mellem eksponentielt voksende og aftagende funktioner. Skriv til sidst en konklusion på mindst 5 punkter, hvor I angiver de vigtigste resultater af jeres arbejde, samt eventuelle uafklarede spørgsmål, som I måtte ønske at få diskuteret.

3.7 CARBON-14 DATERING

Den kendsgerning, at mængden af et radioaktivt nuklid aftager eksponentielt med tiden, og derfor kan modelleres ved et udtryk af formen $y = ba^t$, hvor b er en konstant, der angiver mængden ved startidspunktet, $0<a<1$ og t er tiden, anvendes af arkæologer i den såkaldte Carbon-14 datering, når de skal foretage en aldersbestemmelse.

En del af atmosfærens CO_2 indhold er Carbon-14, der er et radioaktivt nuklid. Carbon-14 udgør en konstant del af atmosfærens carbonindhold. Alle grønne planter, træer inkluderet, anvender carbon fra atmosfærens carbondioxid som byggesten til deres organiske stof. Derfor er indholdet af Carbon-14 i alle levende planter næsten konstant. Men når et træ dør, vil Carbon-14 ikke længere blive suppleret, og mængden af Carbon-14 vil derfor aftage på grund af det radioaktive henfald. Halveringstiden for Carbon-14 er 5568 år.

a) Opstil en formel til bestemmelse af mængden af Carbon-14 efter t år, hvis der til at begynde med var 1 mg.

b) De Trojanske krige fandt sted omkring år 1200 før vor tidsregning. Hvis en eller anden påstår at være i besiddelse af et stykke træ fra den oprindelige Trojanske Hest, hvor mange procent af den oprindelige mængde Carbon-14 skal der så være tilbage i træet?

c) Som du sikkert ved fra biologi, så spiser herbivorer (planteædere) planter, og carnivorer (kødædere) spiser herbivorer osv. Herved spredes Carbon-14 gennem fødekæden, og Carbon-14 datering kan således anvendes på alle former for organiske rester. Knogler fra fund fra det moderne menneskes (homosapien) ældste lejrpladser indeholder omkring 0,7% af den oprindelige mængde Carbon-14. Hvor gamle er disse lejrpladser?

3.8 KØLERVÆSKE

Køleren i en lastbil kan rumme 20 liter. Der fyldes 20 liter vand i køleren. Men vinteren strenges, så hver dag fjernes der 4 liter væske fra køleren, og der efterfyldes med antifrostvæske.

a) Hvor meget vand er der tilbage efter 1.efterfyldning, efter 3. efterfyldning, efter n-te efterfyldning?

b) Hvornår er der 4 liter vand tilbage i køleren? Hvornår er 10% af indholdet i køleren vand?

c) Konstruer 2 grafer. Den ene skal vise mængden af vand i køleren som funktion af tiden, den anden mængden af antifrostvæske som funktion af tiden. Hvor længe er der mere vand end antifrostvæske i køleren? Hvornår er 95% af indholdet i køleren antifrostvæske?

3.9 AFSLUTNING AF KAPITEL 3

Skriv et kort referat af dine aktiviteter i forbindelse med dette tema om eksponentiel vækst. Referatet skal afsluttes med en konklusion om, hvad du synes, er de vigtigste resultater af arbejdet med dette tema. Sammenlign også resultaterne med dine resultater fra tema 1 og tema 2. Du kan endvidere fremsætte såvel kritik og spørgsmål vedrørende temaet, samt give forslag til ændringer mm.

4 EKSPERIMENTER

Som nævnt i de tidligere temaer så findes der stoffer – både naturligt forekommende som kunstigt frembragte – der udsender stråling. Strålingen fra disse radioaktive stoffer kaldes ioniserende stråling, fordi den kan danne ioner, når den passerer gennem et stof.

Atomkernen består af to slags partikler: protoner og neutroner. Protoner har en positiv ladning, mens neutronerne er elektrisk neutrale. Kernepartiklerne kaldes under et for nukleoner. Antallet af protoner kaldes protontallet og betegnes med Z, mens antallet af neutroner kaldes netrontallet og betegnes med N. I et grundstof har alle atomkernerne det samme antal protoner, men ikke nødvendigvis det samme antal neutroner. I et nuklid har alle kernerne derimod det samme antal protoner og det samme antal neutroner, og dermed også samme nukleontal/massetal, som er summen af protontallet og neutrontallet. Anvendes A for nukleontallet må der således gælde, at A = Z + N. Man beskriver normalt et nuklid ved anføre den kemiske betegnelse for det grundstof, som nuklidet tilhører, samt dets nukleontal. Således betegner Pu-239 det plutonium nuklid, der indeholder 239 kernepartikler (94 protoner og 145 neutroner) plutonium-239. Ofte anvendes også atomnummeret, der er lig med protontallet, og så skrives plutonium-239 således $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$.

Ioniserende stråling fremkommer ved, at kernerne i et radioaktivt nuklid omdannes – man siger at nuklidet henfalder. De tre mest kendte former for ioniserende stråling er *alfa-, beta- og gamma-stråling* (eller α-, β- og γ-stråling).

Ved α-stråling udsendes der en heliumkerne, der består af 2 protoner og 2 neutroner. Nuklidet Po-212 er α-radioaktivt, og henfalder til Pb-208. Når en sådan henfaldsproces skal beskrives, opstiller man et reaktionsskema, der kaldes et henfaldsskema:

$$^{212}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{208}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$$

Ved β-stråling udsendes der en elektron, der er en negativt ladet partikel. Som et eksempel på et β-henfald, kan vi se på Bi-212, der henfalder til Po-212. Denne henfaldsproces beskrives således:

$$^{212}_{83}\text{Bi} \rightarrow {}^{212}_{84}\text{Po} + {}^{0}_{-1}\text{e}$$

γ-stråling er elektromagnetisk stråling, der består af fotoner, som er masseløse, men har energi. Med γ-stråling fjernes overskudsenergi fra kernen. Et eksempel på γ-henfald er når Tl-208 afgiver overskudsenergi fra kernen. Dette beskrives således:

$$^{208}_{81}\text{Tl} \rightarrow {}^{208}_{81}\text{Tl} + \gamma$$

a) Gennemgå ovenstående 3 henfaldsskemaer grundigt, så du er helt sikkert på betydningen af alle symboler, der indgår. Overvej specielt hvorfor der anvendes følgende symbol for elektronen: $^{0}_{-1}\text{e}$

b) Hvilke generelle regler for henfaldsskemaer for radioaktivt henfald vil du opstille på baggrund af ovenstående eksempler. Giv eventuelt selv eksempler på henfaldsskemaer.

c) Som nævnt består β-stråling af elektroner. Men elektronen er jo ikke en kernepartikel, så hvordan kan vi forklare, at den optræder ved β-henfald?

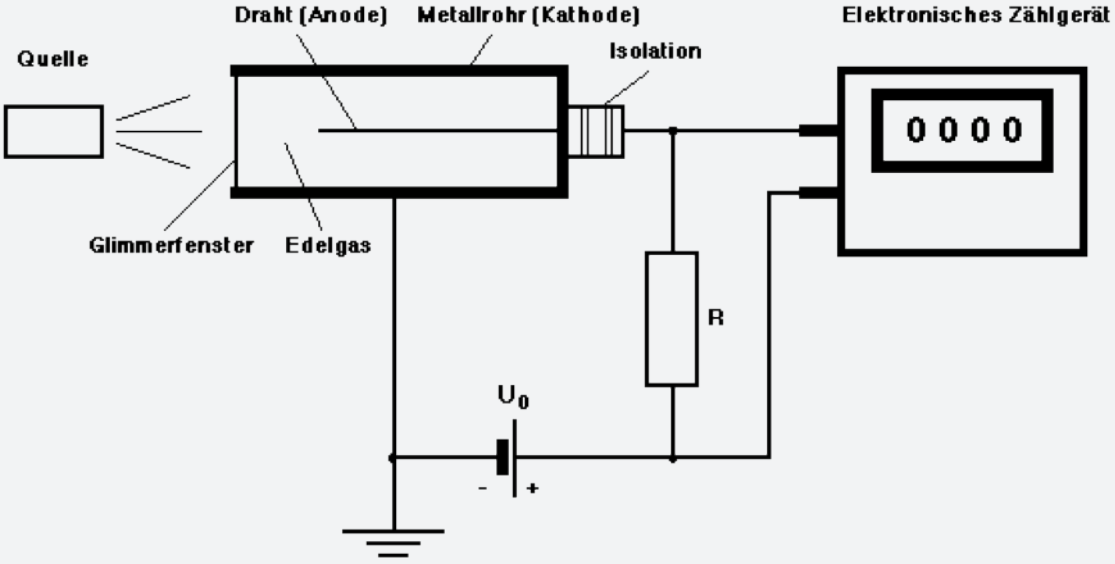
4.1 EKPERIMENTER MED RADIOAKTIVITET

Den ioniserende stråling kan ikke registreres med vore sanser. Skal vi udføre eksperimenter med radioaktivitet, må vi derfor have måleinstrumenter, der kan registrere den ioniserende stråling. En *Geiger-Müller tæller* er et meget anvendt instrument til at registrere ioniserende stråling. Tælleren er udviklet af den tyske fysiker Johannes Wilhelm Geiger (1882-1945) i 1913.



Johannes Wilhelm Geiger
Foto: Ukendt/Public domain

Figuren nedenfor viser princippet i Geiger-Müller tælleren:



Kilde: http://educeth.ethz.ch/physik/leitprog/radio/kap3.html#heading200

Geiger-Müller tælleren består af et cylinderformet rør, en spændingsforsyning og et tælleværk. I røret er der en luftart, der kan ioniseres, når ioniserende stråling fra en kilde trænger ind i røret. Spændingsforsyningen til røret vil så sørge for, at de dannede ioner giver anledning til en elektrisk impuls, som tælleværket registrerer. Tælleværket er som regel forsynet med et elektronisk ur, som automatisk stopper, når der er gået et bestemt tidsrum. Størrelsen af dette tidsrum kan varieres.

Tænk tilbage på kapitel 1, hvor du simulerede den radioaktive henfaldsproces, og overvej så nøje hvilken del af henfaldsprocessen, du kan måle på med en Geiger-Müller tæller.

Du skal nu udføre nogle eksperimenter, hvor der bl.a skal foretages målinger med en Geiger-Müller tæller. Du skal selv til hvert eksperiment udfærdige en journal, hvor du gennemgår eksperimentet, angiver måleresultater og foretager databehandling. I forbindelse med databehandlingen bør du inddrage dine erfaringer fra de tidligere temaer om radioaktivitet og matematiske modeller. Ved den grafiske behandling skal du bl.a. anvende enkeltlogaritmisk koordinatsystem (din lærer vil give dig en kort introduktion til, hvordan dette koordinatsystem anvendes).

a) Eksperiment 1: Du skal udføre et eksperiment, hvor du måler på en radioaktiv kilde, for at undersøge, om henfaldet følger den model for den radioaktive henfaldsproces, som vi tidligere har opstillet. Overvej nøje hvilke størrelser du måler i eksperimentet, hvilke størrelser du kan bestemme i forbindelse med databehandlingen, samt hvilke konklusioner der kan drages.

b) Eksperiment 2: Når ioniserende stråling rammer et materiale, så vil strålingen afsætte energi i materialet. Herved svækkes strålingen, og dette fænomen kalder vi absorption af ioniserende stråling. Her skal du udføre et eksperiment, hvor du undersøger absorption af γ-stråling i forskellige materialer (bly, vand og sand). For hvert materiale skal du undersøge sammenhængen mellem materialets tykkelse og hvor meget af strålingen, der ikke bliver absorberet. Overvej inden du går i gang med eksperimentet, om den situation, du her skal undersøge, minder om noget du tidligere har beskæftiget dig med. Hvis det er tilfældet, så kan du jo passende inddrage dine erfaringer fra tidligere i forbindelse med databehandlingen.

4.2 AKTIVITET

Med den model, vi har opstillet for den radioaktive henfaldsproces, kan antallet af kerner N til et vilkårligt tidspunkt t bestemmes. Men som du sikkert har bemærket i forbindelse med eksperimenterne ovenfor, så er det ikke er muligt direkte at måle antallet af kerner i et nuklid. Til at beskrive strålingen fra et radioaktivt nuklid har man derfor indført størrelsen aktivitet, der normalt betegnes med A. Ved aktiviteten af et nuklid forstår man det antal kerner, der henfalder pr. sekund. Enheden for aktivitet er således s^{-1} og denne har – i erkendelse af Henri Becquerels indsats på området – fået navnet becquerel, og betegnes med Bq.

a) Hvilken sammenhæng er der for et bestemt nuklid mellem antallet af kerner N og aktiviten A?

b) Udvid modellen for den radioaktive henfaldsproces, ved at tilføje en beskrivelse (grafer, tabeller, formler) af aktiviteten som funktion af tiden.

4.3 GAMMASTRÅLER

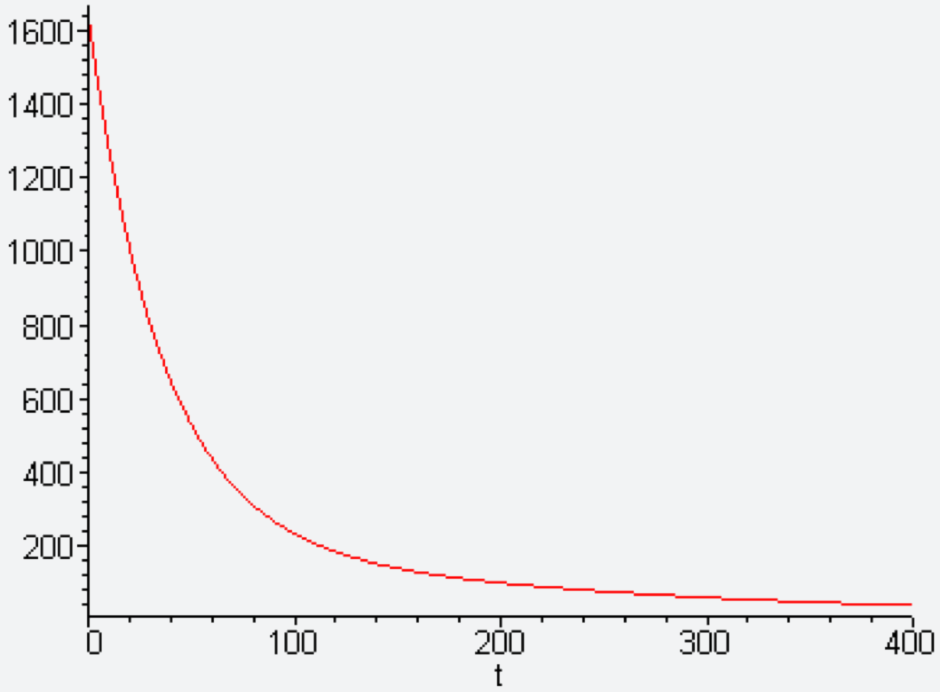
Når en bestemt type gammastråler sendes gennem en blyvæg på 16 mm, så reduceres strålingens intensitet med 60%.

a) Hvor mange blyplader skal der til for at reducere strålingen til 5% af strålingens intensitet uden blyplader?

b) Hvor tyk skal en blyvæg være, for at den halverer strålingens intensitet?

4.4 SØLVAKTIVERING

Et kendt eksperiment til undersøgelse af radioaktivitet går ud på at aktivere sølv. Et stykke sølv på nogle få cm^2 placeres i en neutronkilde og bestråles i omkring 15 minutter. Derefter måles aktiviteten fra den bestrålede sølvplade i 400 sekunder. Grafen herunder viser hvordan aktiviteten aftager med tiden:



Sølvpladen, der aktiveres, består af de to stabile sølvisotoper Ag-107 og Ag-109. I neutronkilden omdannes de ved neutronindfangning til henholdsvis Ag-108 og Ag-110.

a) Opstil reaktionsskemaer for omdannelsen af Ag-107 og Ag-109. Husk reglerne for reaktionsskemaet, som du opstillede i øvelse 4.1 , og anvend følgende betegnelse for neutronen $^{1}_{0}n$ (overvej hvorfor denne betegnelse anvendes).

Ag-108 og Ag-110 er begge radioaktive isotoper.

b) Find ved hjælp af et kernekort ud af, hvilken type radioaktive isotoper, der her er tale om, og angiv derefter et reaktionsskema for henfaldet af henholdsvis Ag-108 og Ag-110.

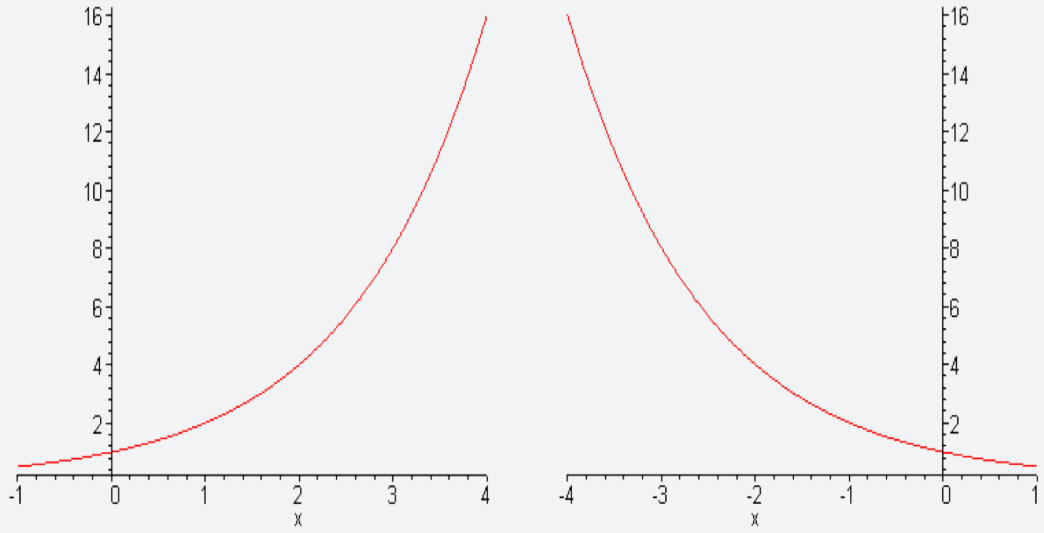
Ved ovenfor omtalte eksperiment er der altså målt på 2 henfaldsprocesser på en gang, og grafen ovenfor viser således den samlede aktivitet fra de to radioaktive isotoper.

c) Antag, at der til t = 0 er 50000 Ag-108 kerner og 50000 Ag-110 kerner. Idet det oplyses, at halveringstiden for Ag-108 er 24.76 s og 144.41 s for Ag-110, skal der opstilles et udtryk der angiver den samlede aktivitet som funktion af tiden. Aftager denne aktivitet eksponentielt med tiden?

4.5 EKSPONENTIALFUNKTIONER

Som tidligere nævnt kaldes en sammenhæng mellem to variabler x og y, der er givet ved $y = ba^x$, hvor a og b er positive tal, en eksponentiel vækstfunktion. I det tilfælde, hvor b = 1, bliver forskriften $y = a^x$. Sådan en funktion kaldes en eksponentialfunktion og a kaldes grundtallet for eksponentialfunktionen. Nedenfor ser du graferne for de ekponentialfunktioner, der har forskrift henholdsvis $y = 2^x$ og $y = 0.5^x$.

a) Hvordan skal 2.aksen i koordinatsystemerne ændres, så de to grafer bliver rette linier, og der bliver plads til flere punkter? Tegn derefter graferne for de ekponentialfunktioner, der har forskrift henholdsvis $y = 10^x$ og $y = 0.1^x$, og besvar så samme spørgsmål.



b) Forestil at grafen for en eksponentialfunktion parallelforskydes langs med 1.-aksen. Hvordan ændres forskriften for funktionen ved denne parallelforskydning?

c) Forestil at grafen for en eksponentialfunktion parallelforskydes langs med 2.-aksen. Hvordan ændres forskriften for funktionen ved denne parallelforskydning?

4.6 ENKELTLOGARITMISK KOORDINATSYSTEM

I forbindelse med behandlingen af de indsamlede data fra dine eksperimenter anvendte du enkeltlogaritmisk koordinatsystem, og du så at grafer, som krummer i et almindeligt koordinatsystem, bliver en ret linie i et *enkeltlogaritmisk koordinatsystem*. Du skal i denne øvelse undersøge et sådant koordinatsystem nærmere.

a) Forklar hvordan 2.aksen i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem er indrettet.

b) Undersøg hvilke af følgende tre funktionstyper, der giver en ret linie i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem: $y = ax + b$, $y = ba^x$ og $y = ax^2$.

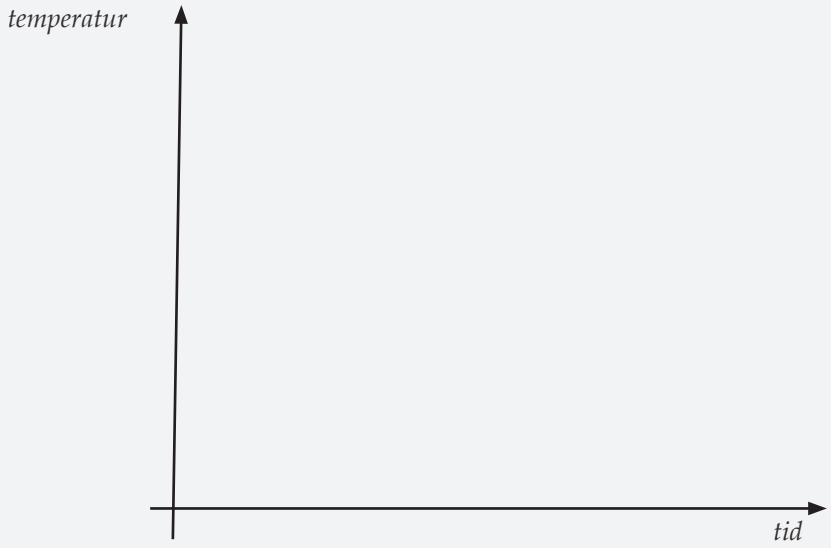
c) Kan du forklare hvorfor nogle funktioner giver en ret linie i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem?

4.7 NEWTONS AFKØLINGSLOV

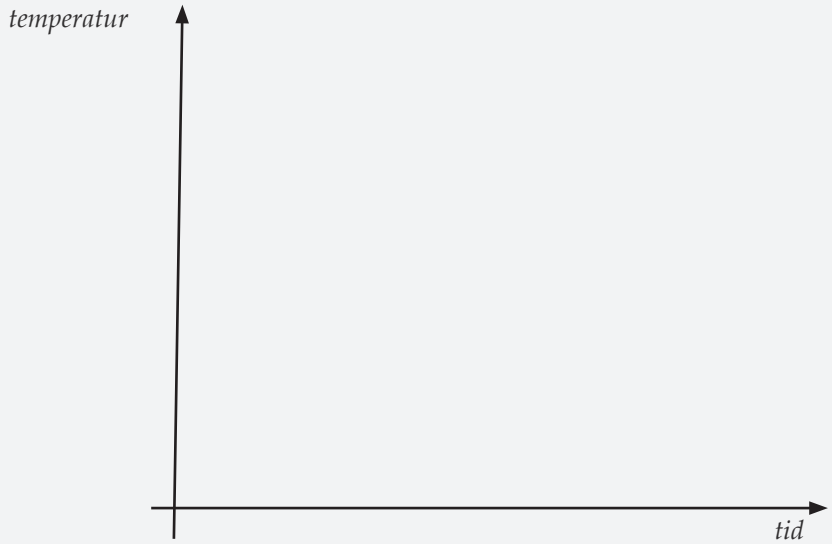
Forestil dig at en ting har en temperatur, der er forskellig fra omgivelserne, f.eks. en varm kop kaffe eller et glas isvand i et rum med stuetemperatur.

a) Beskriv kort hvordan du forventer, at henholdsvis kaffens og isvandets temperatur ændres efterhånden som tiden går.

b) Skitser nedenfor en mulig graf for den sammenhæng mellem kaffens temperatur og tiden, som du ovenfor beskrev:



c) Skitser nedenfor en mulig graf for den sammenhæng mellem isvandets temperatur og tiden, som du ovenfor beskrev:



Newtons afkølingslov er en matematisk model, der forudsiger hvordan temperaturen af en varm genstand aftager med tiden. Loven siger, at temperaturændringen over et lille tidsrum er proportional med temperaturforskellen mellem væsken og omgivelserne. Du skal i denne øvelse på baggrund af et eksperiment og dine erfaringer med matematiske modeller opstille Newtons afkølingslov.

d) Planlæg og udfør et forsøg, der kan give dig data, der kan anvendes ved opstilling af modellen.

e) Opstil Newtons afkølingslov (grafer, tabeller, formler).

4.8 ALGER I KYSTOMRÅDER

Når store mængder næringssalte siver ud i lavvandede kystområder, øges mængden af alger i vandet, og vandet bliver uklart. Som et mål for algemængden bruges chlorofyl-a koncentrationen, der her betegnes med C og måles i µg/L. Som et mål for vandets uklarhed anvendes sigtedybden, der betegnes med d og måles i m:

$$C = 60.3 \cdot 0.49^d$$

a) Udfyld følgende tabel:

d	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
C											
ΔC										*	*

b) Tegn en (d,C)-graf og en (C,ΔC)-graf.

c) Hvad kan du på baggrund af tabellen og de to grafer konkludere om sammenhængen mellem sigtedybden og chlorofyl-a koncentrationen?

Sigtedybden er bestemmende for, på hvor stor en vanddybde man kan finde bundvegetation, f.eks. ålegræs. Sammenhængen mellem sigtedybden d (målt i m), og den største dybde b (målt i m), som ålegræs kan vokse på, er ved målinger bestemt til

$$b = 1.9 \cdot d - 3.6$$

e) Bestem den største dybde som ålegræs kan vokse på, når chlorofyl-a koncentrationen er 3 µg/L.

f) Beskriv sammenhængen mellem chlorofyl-a koncentrationen C (målt i µg/L) og den største dybde b (målt i m), som ålegræs kan vokse på. Du kan f.eks. beskrive sammenhængen på baggrund af graf(er) og/eller tabeller.

4.9 AFSLUTNING AF KAPITEL 4

Skriv et kort referat af dine aktiviteter i forbindelse med dette tema. Referatet skal afsluttes med en konklusion om, hvad du synes er de vigtigste resultater af arbejdet med dette tema – er der f.eks. ting fra de tidligere temaer, som du nu forstår bedre, og som du nu kan anvende i forskellige sammenhænge (du må gerne give eksempler). Prøv også at ridse op, hvilke matematiske egenskaber ved eksponentielle vækstfunktioner, du indtil nu har fundet. Du kan endvidere fremsætte såvel kritik og spørgsmål vedrørende temaet, samt give forslag til ændringer mm.

5 FUNKTIONER

Du har måske allerede i folkeskolen stiftet bekendtskab med funktioner, og du har sikkert også bemærket, at funktioner både har en fremtrædende plads i gymnasiets matematikundervisning og anvendes i andre fag som f.eks. fysik og kemi. Og det er ikke uden grund, idet funktioner ikke bare er et blandt mange matematiske begreber, som du skal præsenteres for i matematikundervisningen. Funktioner er det centrale og grundlæggende begreb i moderne matematik. Endvidere har funktioner en lang række praktiske anvendelser såvel inden for matematik som i andre fag.

Ordet funktion dukkede første gang op i ved en brevveksling mellem de to matematikere Gottfried von Leibniz (1646-1716) og Johann Bernoulli (1667-1748) i slutningen af 1690. Her beskriver Leibniz seks funktioner som et værktøj til at undersøge kurver. Leibniz har spillet en fremtrædende rolle i udviklingen af den matematik, vi i dag lærer i gymnasiet. Specielt er hans bidrag til differential- og integralregning af central betydning, og det bør også nævnes at han konstruerede en af de første regnemaskiner.



Gottfried von Leibniz
Portræt: Christoph Bernhard Francke/Public domain



Leonhard Euler
Portræt: Jakob Emanuel Handmann/Public domain

En af de mest produktive personer i matematik, den schweizisk fødte matematiker Leonhard Euler (1707-1783), har sammen med den tyske matematiker Johann Peter Gustav Lejeunne Dirichlet (1805-1859) haft en afgørende indflydelse på udviklingen af det funktionsbegreb, som vi i dag beskæftiger os med i gymnasiet. I bogen Introductio in analysin infinitorum, som Euler udgav i 1748, indtager begrebet funktioner for første gang i historien en central plads inden for det område af matematik, der kaldes analyse. I indledningen hævder Euler, at:

Al analyse er en videnskab om variable og funktioner af sådanne variable

Begrebet funktion definer Euler således:

§4. En funktion af en variabel størrelse er et analytisk udtryk, sammensat på hvilken som helst måde af denne variable størrelse af tal eller konstanter.

Dirichlet fremsatte i 1837 følgende definition på en funktion:

Hvis en variabel y er sådan relateret til en variabel x, at når en numerisk værdi er tildelt x, og der er en regel, således at en unik værdi af y er bestemt, så siges det, at y er en funktion af den uafhængige variabel, x.



Johann Peter Gustav Lejeunne Dirichlet
Portræt: Ukendt/Public domain

a) Prøv at sammenligne Eulers og Dirichlets definitioner med den definition af begrebet funktion, der er i din matematikbog. Overvej grundigt hvad en funktion er, og hvad en variabel er – skriv nogle stikord og giv eksempler.

Du har sikkert bemærket, at din matematikbog anvender den såkaldte *f(x)*-form i forbindelse med funktioner. F.eks. har vi tidligere angivet en eksponentiel vækstfunktion på formen $y = b \cdot a^x$. Den vil på f(x)-form vil se således ud: $f(x) = b \cdot a^x$, og vi vil kalde funktionen *f*. Denne form kaldes også for en regneforskrift for funktionen, idet den angiver hvordan funktionsværdien kan udregnes. Hvis en funktion *f* er givet ved regneforskriften $f(x) = 5 \cdot 2^x$, så kan vi f.eks. beregne funktionsværdien for $x = 3$ således:

$$\mathbf{f(3) = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40}$$

b) Bestem for ovenstående funktion følgende funktionsværdier: *f(0), f(1), f(10), f(100), f(-1), f(-3) og f(-10).*

c) I forbindelse med funktioner siger man, at en funktion kan angives på *symbolsk form*, på *grafisk form*, på *tabel form* eller på *verbal form*. Overvej hvad de forskellige former dækker, og prøv at give eksempler. Du kan tage udgangspunkt i nogle af de ting, du har beskæftiget dig med i forbindelse de sidste ugers temaer, eller du kan inddrage noget fra tidligere situationer, hvor du er stødt på funktionbegrebet, f.eks. i forbindelse med fysik, kemi eller matematik undervisningen.

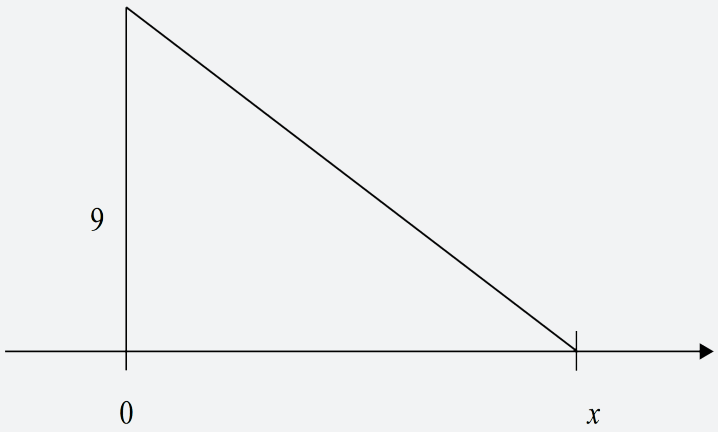
Hvis du vil vide mere om Euler, Dirichlet og funktioner, så kan du jo prøve at gå på biblioteket eller søge på nettet. Prøv f.eks. følgende web-adresser:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Euler.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Dirichlet.html

5.1 TREKANTENS AREAL

Figuren nedenfor viser en retvinklet trekant, der er placeret på en x-akse med den rette vinkel i aksens 0-punkt.



a) Tegn for $x = 5$ trekanten, og beregn så trekantens areal og omkreds? Besvar også spørgsmålet for $x = 1$, $x = 4$ og $x = 10$.

b) Lad $f(x)$ være trekantens areal som funktion af x, og $g(x)$ trekantens omkreds som funktion af x. Bestem regneforskrifter for de to funktioner og tegn graferne (gerne ved hjælp af lommeregneren). Kan x være 0? Kan x være negativ?

5.2 FUNKTIONER PÅ TABEL FORM

Nedenfor er der to funktioner *f* og *g* på tabel form. Angiv begge funktioner på symbolsk form, på grafisk form og på verbal form.

x	2	3	4	5
f(x)	1.4641	1.331	1.21	1.1

x	-1	1	3	5
g(x)	-8.3	-3.8	0.7	5.2

5.3 SAMMENLIGNING AF LINEÆR OG EKSPONENTIEL VÆKST

a) Find eksempler på både lineær og eksponentiel vækst. Brug eksemplerne til at sammenligne de to funktionstypers symbol former, grafiske former, tabel former og verbale former.

b) Som du sikkert ved, kræves der for at fastlægge en lineær funktion kun to forskellige oplysninger, f.eks. to punkter på den rette linie, der er graf for funktionen. Overvej om noget tilsvarende gør sig gældende for eksponentielle vækstfunktioner. Giv eksempler på fastlæggelse af såvel lineære funktioner som eksponentielle vækstfunktioner. Du kan f.eks. inddrage nedenstående opgaver:

- Om en eksponentiel vækstfunktion f oplyses, at $f(5) = 8$ og $f(10) = 2.3$. Tegn grafen for f og bestem en regneforskrift.

- Om en eksponentiel vækstfunktion g oplyses, at $g(-2) = 1$, og at fordoblingskonstanten er 5. Tegn grafen for g og bestem en regneforskrift.

5.4 DET AFTAGENDE KVADRAT

Et kvadrat bliver mindre og mindre. Hver gang der er forløbet en tidsenhed, formindskes kvadratets areal med en faktor på 0.81.

Til et bestemt tidspunkt har kvadratet et areal på 81.

a) Bestem kvadratets sidelængde og omkreds til dette tidspunkt og tegn kvadratet.

b) Bestem kvadratets areal, sidelængde samt omkreds til følgende tidspunkter:

- 1, 2 og 5 tidsenheder efter ovennævnte tidspunkt.

- 1, 2 og 5 tidsenheder før ovennævnte tidspunkt.

c) Opstil tabeller og tegn grafer der viser sammenhængen mellem

- tiden og kvadratets areal.

- tiden og kvadratets sidelængde.

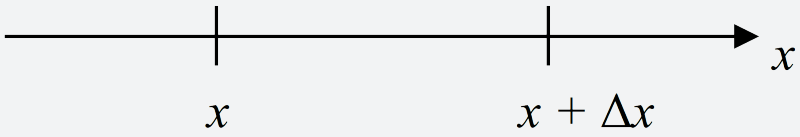
- tiden og kvadratets omkreds.

d) Lad x betegne tiden, $f(x)$ kvadratets areal som funktion af tiden, $g(x)$ kvadratets sidelængde som funktion af tiden og $h(x)$ kvadratets omkreds som funktion af tiden. Opstil regneforskrifter for de tre funktioner. Hvilke sammenhænge er der mellem de tre funktioner?

e) I ovenstående er kvadratets areal 81 til tiden $x = 0$. Forestil dig nu, at du har en af de dage, hvor det kniber med at komme i gang. Derfor får du først set på kvadratet 5 tidsperioder efter at arealet var 81, og du vælger derfor dette tidspunkt til at svare til $x = 0$. Lad $k(x)$ være kvadratets areal som funktion af tiden x i denne situation. Opstil en regneforskrift for $k(x)$ og sammenlign den med $f(x)$. Forestil dig derefter, at du nu har en af de dage, hvor du er ude af starthullerne med det samme, og derfor kommer til at se på kvadratet 5 tidsperioder før dets areal er 81. Nu vælger du dette tidspunkt til at svare til x = 0. Lad $l(x)$ være kvadratets areal som funktion af tiden x i denne situation. Opstil en regneforskrift for $l(x)$ og sammenlign den med $f(x)$.

f) Husker du Larry og Mogens fra Kapitel 2? Det er faktisk dem, der har opfundet det aftagende kvadrat. De tager nu det aftagende kvadrat (der til tiden $x = 0$ har arealet 81), og placerer det ovenpå låget af Mogens' cigarkasse, der har arealet 5. Lad nu $m(x)$ være det samlede areal af kvadrat og låg som funktion af tiden. Opstil en regneforskrift for $m(x)$ og sammenlign den med $f(x)$.

5.5 FUNKTIONSTILVÆKST



Ovenfor ser du to punkter på x-aksen med en indbyrdes afstand Δx. Lad f være en funktion, der er defineret på ovenstående stykke af x-aksen. Så er funktionsværdien i det første punkt $f(x)$, og i det andet punkt er den $f(x + \Delta x)$. Vi indfører nu funktionstilvæksten over Δx, der betegnes Δf og defineres ved:

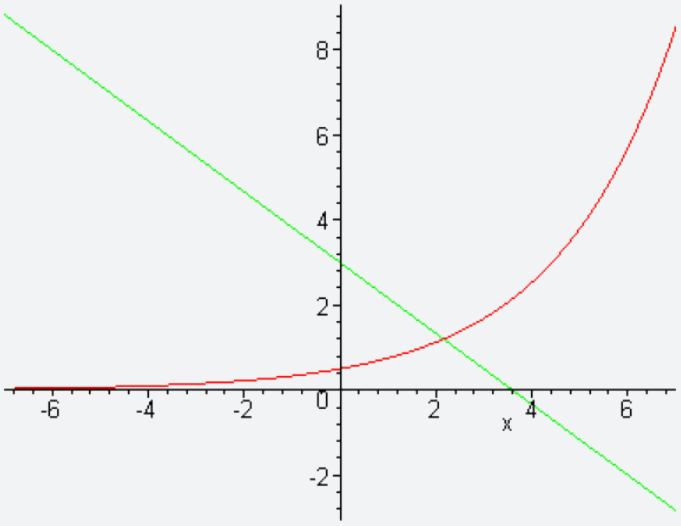
$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Er $\Delta x = 1$ har vi

$$\Delta f = f(x + 1) - f(x)$$

I resten af denne øvelse vil $\Delta x = 1$.

a) I koordinatsystemet nedenfor ses graferne for to funktioner. Bestem for hver af funktioner for forskellige x-værdier (vælg selv) funktionstilvæksten.



b) To funktioner f og g er givet ved forskrifterne $f(x) = 2.5 \cdot x - 10$ og $g(x) = 20 \cdot 0.75^x$. Bestem for hver af funktioner for forskellige x-værdier (vælg selv) funktionstilvæksten.

c) Kan du på baggrund af a) og b) samt dine erfaringer fra tidligere sige noget generelt om funktionstilvæksten for henholdsvis lineære funktioner og eksponentielle vækstfunktioner?

d) Om en funktion f oplyses det, at $f(5) = 6$ og $f(x + 1) - f(x) = -3$ for alle x. Bestem en forskrift for funktionen og tegn grafen.

e) Om en funktion g oplyses det, at $g(0) = 2$ og $g(x + 1) - g(x) = 2.5 \cdot g(x)$ for alle x. Bestem en forskrift for funktionen og tegn grafen.

5.6 FREMLÆGGELSE AF MODEL

Resultaterne af dit arbejde med eksponentielle vækstfunktioner skal nu fremlægges for klassen. Sammen med din gruppe skal du udfærdige en kort beskrivelse af jeres arbejde, hvor der gøres rede for hvilke generelle egenskaber ved eksponentielle vækstfunktioner, I har fundet. Overvej også om der er nogle af disse egenskaber kan bevises, og fremsæt eventuelt forslag til beviser.

5.7 SAMMENLIGNING AF FORSKELLIGE TYPER AF FUNKTIONER

Du skal i denne øvelse ved hjælp af din lommeregner sammenligne grafer for forskellige typer af vækstfunktioner: lineær, eksponentiel og kvadratisk. Tag udgangspunkt i følgende tabel, hvor du selv skal tilføje funktioner efter eget valg i de 9 tomme felter:

LINEÆR	EKSPONENTIEL	KVADRATISK
$f(x) = 2x + 3$	$g(x) = 5 \cdot 3^x$	$h(x) = x^2 + 10x + 4$
$f(x) = -2x + 3$	$g(x) = 5 \cdot 0.3^x$	$h(x) = -x^2 + 10x + 4$

a) Tegn funktionernes grafer med lommeregneren, bemærk

- hvordan funktionsværdien ændres når x øges.
- eventuelle symmetriegenskaber (om koordinatakserne, i begyndelsespunktet).
- største- og mindsteværdier.
- specielle egenskaber.

b) Skriv resultatet af dine observationer ind i et skema som nedenstående:

VÆKST TYPE	EGENSKABER
LINEÆR	
EKSPONENTIEL	
KVADRATISK	

c) Din lommeregner indeholder faciliteter til at foretage regression. Det betyder, at du kan undersøge om et datasæt kan beskrives ved lineær, eksponentiel eller kvadratisk vækst. Prøv at foretage en regressions undersøgelse af nogle datasæt, f.eks. fra eksperimenter du har udført.

5.8 FORTÆL OM FUNKTIONER

Om en funktion f oplyses det, at

$$f(5) = 10 \text{ og } f(x+1) - f(x) = 3 \cdot f(x) \text{ for alle } x$$

a) Hvad kan du på baggrund af ovenstående oplysninger fortælle om funktionen f? Hvad er ifølge din opfattelse funktionens vigtigste egenskaber?

b) Kan du nævne situationer fra virkeligheden, der kan beskrives ved funktionen f?

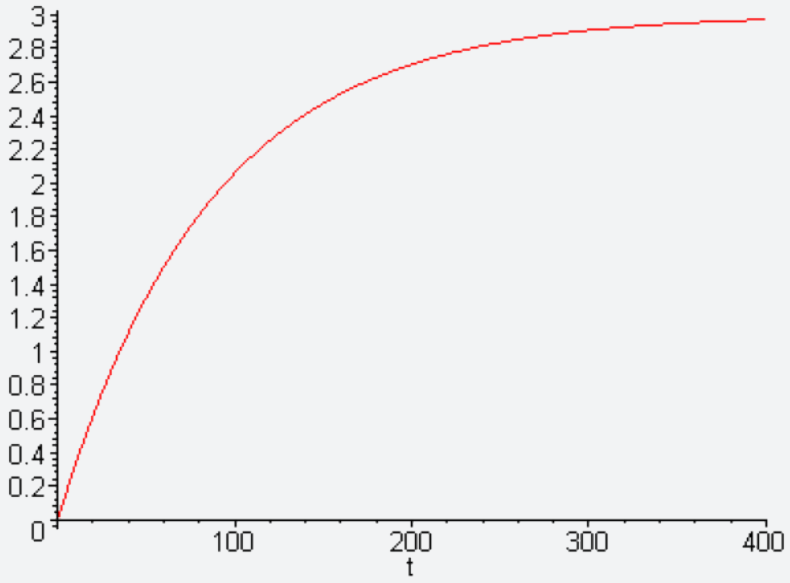
Om funktionerne g og h oplyses, at

$$g(x) = 4 \cdot f(x) \text{ og } h(x) = f(x+4)$$

c) Hvad kan du på baggrund af ovenstående oplysninger fortælle om funktionerne g og h?

5.9 BROMKONCENTRATION

Figuren nedenfor viser, hvorledes bromkoncentrationen som funktion af tiden udvikler sig under en kemisk reaktion mellem bromidioner og bromationer i en sur opløsning.



a) Hvad kan du på baggrund af ovenstående graf fortælle om reaktionen mellem bromidioner og bromationer i en sur opløsning?

b) Opstil en forskrift for bromkoncentrationen som funktion af tiden.

5.10 RADIOAKTIV HENFALDSKÆDE

Vi har i forbindelse med opstillingen af modellen for radioaktivt henfald, hvor et nuklid A henfalder til et nuklid B, antaget, at A henfalder til et stabilt nuklid B.

a) Forestil dig, at du har 1000 kerner af et radioaktivt nuklid A, der henfalder til et stabilt nuklid B. Sandsynligheden for at en kerne fra A henfalder i løbet af en tidsperiode er 1/6. Opstil en model, der angive antallet af kerner i nuklid B, som funktion af tiden.

Men hvad nu, hvis B ikke er stabilt, men også radioaktivt? Den er en situation, vi ofte vil komme ud for, f.eks. i forbindelse med de radioaktive familier.

b) Find eksempler på radioaktive familie.

Vi har altså, at

A -> B -> C -> D osv

og stiller nu spørgsmålet: Hvad er antallet af kerner af nuklid B som funktion af tiden? Der dannes jo hele tiden B-kerner, når A henfalder, men da B selv er radioaktiv, forsvinder der også B-kerner. Du skal nu opstille en matematisk model for denne situation.

c) Forestil dig, at du har et radioaktivt nuklid A, der henfalder til et radioaktivt nuklid B, der igen henfalder til et stabilt nuklid C. Sandsynligheden for at en A-kerne henfalder i løbet af en tids¬periode er 1/6, og sandsynligheden for at en B-kerne henfalder i løbet af en tidsperiode er 1/3. Til tiden $t = 0$ er antallet af A-kerner 1000, mens antallet af B- og C-kerner er 0. Opstil nu en matematisk model, der angive antallet af A-, B- og C-kerner som funktion af tiden.

d) Afprøv modellen med andre værdier for sandsynligheden for henfald.

5.11 AFSLUTNING AF KAPITEL 5

Skriv et kort referat af dine aktiviteter i forbindelse med dette tema. Referatet skal afsluttes med en konklusion om, hvad du synes er de vigtigste resultater af arbejdet med dette tema – hvilke matematiske egenskaber ved eksponentielle vækstfunktioner har du nu fundet. Temaet er det sidste i dette forløb om eksponentiel vækst og radioaktivitet, så prøv også at skrive lidt om hele forløbet fra vi startede med at opstille en model af radioaktivt henfald og smittespredning, til vi til sidst arbejdede med en model for det matematiske begreb eksponentielle vækstfunktioner. Du kan endvidere fremsætte såvel kritik og spørgsmål vedrørende temaet og hele forløbet, samt give forslag til ændringer mm.