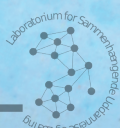


matematik

i naturfagene

Vol. 2

LSUL



SDU



SYD



Region
Syddanmark

2018, 2. udgave

Forside: Colourbox/Logo: Michael Fabrin Hjort

Illustration side 7: Colourbox

Materialet er udgivet under Labmat med økonomisk støtte fra Region Syddanmarks Uddannelsespulje.

Undervisningsforløbene er udviklet under Laboratorium for Sammenhængende Uddannelse og Læring (LSUL).

Tekst, billeder og materialer er udarbejdet af John Schou, Thor Hansen, Ruth Lisa Asmussen, Dorte Bruun, Stefan Aadal Larsen, Marit Hvalsøe Schou, Dorte Ankerfelt, Marianne Østergaard Nielsen og Lena Erbs.

Ansvarshavende redaktør: Claus Michelsen (LSUL)

Assiterende redaktør/layout/design: Michael Fabrin Hjort (LSUL)

Kontakt: lsul@sdu.dk

Der tages forbehold for fejl. Trykt hos Print & Sign, Syddansk Universitet

Materialet er tilgængeligt online på lsul.dk under menupunktet skriftserie.

ISBN: 978-87-92321-26-8

Udgivet af

Laboratorium for Sammenhængende Uddannelse og Læring (LSUL)

Syddansk Universitet

Campusvej 55

5230 Odense M

Denmark

www.lsul.dk

MATEMATIK I NATURFAGENE

UDARBEJDET AF

JOHN SCHOU

I SAMARBEJDE MED

**Thor Hansen, Ruth Lisa Asmussen, Dorte Bruun, Stefan Aadal
Larsen, Marit Hvalsøe Schou, Dorte Ankerfelt, Marianne
Østergaard Nielsen og Lena Erbs.**

REDAKTØR

Claus Michelsen

INTRODUKTION

Det her foreliggende hæfte Matematik i naturfagene indgår som volumen 2 i rækken af læremidler til matematikundervisningen udgivet under titlen Laboratorium for matematikundervisning af Laboratorium for Sammenhængende Uddannelse og Læring (LSUL). Laboratorium for matematikundervisning er et resultat af projektet Laboratorium for Matematikundervisning (LabMat), der er støttet af en bevilling fra Region Syddanmarks Uddannelsespulje. LabMat er et fireårigt projekt med start i 2015, der gennem systematisk og målrettet udviklingsarbejde skal styrke børn og unges kompetencer og færdigheder i matematik fra folkeskole til ungdomsuddannelser. Udviklingsarbejdet omfatter både didaktik, undervisningsforløb med læremidler, workshopaktiviteter og efteruddannelses tiltag, hvor uddannelsesforskere, fagprofessionelle og lærerstuderende inden for rammen af autentiske undervisningsmiljøer afprøver, udveksler og evaluerer nye undervisningsinitiativer matematik i fællesskab.

LabMat fungerer som en motor for en omfattende nytænkning af matematikundervisningen med afsæt i en didaktisk ramme, der prioriterer en undersøgelsesbaseret og anvendelsesorienteret tilgang til matematik og til matematiks samspil med andre fagområder, herunder naturfagene. Nytænkningen omfatter en vision om en ophævelse af den faglige og didaktiske adskillelse af matematik og naturfag i grundskolen og ungdomsuddannelser. LabMats tiltag skal bringe undervisningen på alle niveauer i nærmere overensstemmelse med den praktiske anvendelse af matematiske kompetencer, og derved fremme de unges forudsætninger og interesse for naturfagene og de tekniske erhvervsuddannelser, hvorved rekrutteringsgrundlaget for regionens fremtidige arbejdskraft inden for naturvidenskab kan styrkes. Udviklingsteams af forskere, lærere og studerende har i fællesskab med afsæt i den såkaldte IBSME -metode udviklet konkrete undersøgelsesbaserede og anvendelsesorienterede undervisningsforløb på tværs af grundskolen og ungdomsuddannelserne til gavn for de dygtigste elever, middelgruppen og i særdeleshed de elever, som er i matematikvanskeligheder.

Som det fremgår af titlen, sætter Matematik i naturfagene fokus på relationerne mellem matematik og naturfagene. Såvel klassisk som moderne naturvidenskab er gennemgribende matematiseret, og matematikken er dybt indvævet i naturvidenskabernes modeller og teoridannelser. Matematikken er naturvidenskabens arbejdssprog, som allerede kommer i spil, når et resultat af et eksperiment foreligger, eller når almene naturlove skal formuleres. Denne matematisering resulterer i matematiske modeller, der beskriver dybdegående strukturer og mønstre i den omgivende verden. Modellerne understreger den kendsgerning, at naturvidenskaben ikke er en direkte afspejling af naturen. Snarere er naturvidenskaben et vindue til naturen, der viser det ikke umiddelbart synlige ved naturen.

Matematik i naturfagene er bygget op omkring en række aktiviteter, der hver især har til formål at invitere eleverne til at anvende matematik til at undersøge og beskrive en situation eller et fænomen i naturen. Den didaktiske ide er, at eleverne i mindre grupper søger at beskrive, analysere og forstå vækstproblematikken gennem en matematiseringsproces, dvs. anvender aktivt sprog og redskaber fra matematik til at undersøge situationer og fænomener.

INDHOLD

	Side
INTRODUKTION	2
1 ASTRONOMI – SOLSYSTEMET OG PLANETBANER	7
2 KODER	11
3 RADIOAKTIVITET	21
4 AFFALD OG AFFALDSHÅNTERING	27
5 FLYTNINGSGEOMETRI I GEOGEBRA	33
6 MODELLERING AF BALANCE PÅ EN VIPPE	37
7 VÆKST OG DIFFERENTIALLIGNINGER	55
8 RUMLIGE FIGURER	69

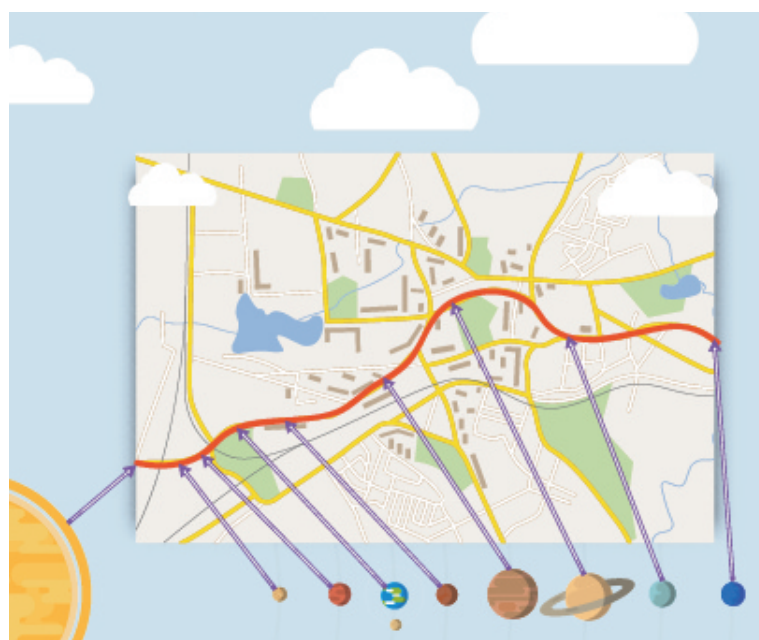
Dette undervisningsforløb henvender sig til elever i 7. - 9. klassetrin og berører områder indenfor fysik/kemi og matematik. Eleverne får indsigt i begreber, såsom størrelsesforhold, afstande, elipseformer og målestok. Forløbet kan tilpasses elevernes forhåndsviden og niveau.

Undervisningsforløbet er præsenteret på to hjemmesider:

- 1 En hjemmeside hvor eleverne skal arbejde med størrelsesforhold, afstande, fart og tid i solsystemet. Elevernes slutprodukt er en video, hvor de skal præsentere deres egen "planetsti":

<https://sites.google.com/ucl.dk/rummet/1-solsystemet>

På hjemmesiden om afstande, størrelsesforhold mm, er tilgangen til elevernes arbejde relativ lukket. Det er et valg vi traf i forhold til den konkrete elevgruppe og dens forudsætninger inden for både det matematiske fokus på målestok/forholdsregning og dens erfaringer med at arbejde undersøgende. Arbejdet er lagt i meget faste rammer, og der er hjælpespørgsmål og eksempler på beregninger undervejs.



- 2 En hjemmeside hvor eleverne skal undersøge ellipseformen, planetbaner og bevægelser i solsystemer:

<https://sites.google.com/ucl.dk/planetbaner/planeternes-baner>

På hjemmesiden om ellipseformen og planetbaner lægges der op til en lidt mere undersøgende arbejdsform. Også dette forløb kan med fordel struktureres anderledes, hvis man arbejder med en elevgruppe, som er mere fortrolig med undersøgende arbejde.

Formålet med undervisningsforløbet er, både de rent faglige mål fra de to fagområder og at styrke samspillet mellem matematik og fysik/kemi gennem eksplicit brug af matematik i arbejdet med solsystemet og planetbaner. Undervisningsforløbet er blevet til i et samarbejde mellem lærer Thor Hansen fra Tingkærskolen i Odense og John Schou fra LSUL. Forløbet er afviklet i 7. klasse på Tingkærskolen i april 2017 som del af et længere forløb i naturfagene om universet.

Fra læseplanen for fysik/kemi¹ henter forløbet i sine begrundelser fra (understregningerne fremhæver de områder, som berøres i forløbet):

Jorden og Universet

Trinforløbet tager udgangspunkt i elevernes systematiske undersøgelser af kraft, tyngdekraft, friktion, masse, fart og acceleration. Eleverne skal bl.a. kunne undersøge tyngdeaccelerationen og sammenhængen mellem kraft, masse og bevægelsesændring (acceleration). (side 5)

Trinforløbet tager udgangspunkt i elevernes forståelse af Jordens bevægelse, rotation, hældningsakse og atmosfære. Eleverne skal kunne udvælge og anvende modeller til beskrivelse af Solsystemet, herunder digitale simuleringer eller fysiske planetmodeller. Eleverne skal kende til Solsystemets placering i Mælkevejen og Universet og skal ved brug af digitale medier kunne navigere på stjernehimlen. (side 7)

Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for fysik/kemi²:

Fysik/kemi

Modellering i naturfag		Formidling	
Eleven kan anvende modeller til forklaring af fænomener	Eleven har viden om modellering i naturfag	Eleven kan kommunikere om naturfag ved brug af egnede medier	Eleven har viden om metoder til at formidle naturfaglige forhold
Jorden og Universet		Jorden og Universet (Modellering)	
Eleven kan undersøge sammenhænge mellem kræfter og bevægelser	Eleven har viden om kræfter og bevægelser	Eleven kan med modeller beskrive bevægelser i Solsystemet og Universets udvikling, herunder med simuleringer	Eleven har viden om teorier for opbygningen af Solsystemet, galakser og Universet

¹ Link: <https://www.emu.dk/sites/default/files/Fysik-kemi%20%C3%A6seplan.pdf>

² Link: <https://www.emu.dk/omraade/gsk-l%C3%A6rer>

Fra læseplanen for matematik¹ henter forløbet i sine begrundelser fra (understregningerne fremhæver de områder, som berøres i forløbet):

Formler og algebraiske udtryk

Senere i trinforløbet skal eleverne kunne oversætte enkle sammenhænge til algebraiske udtryk i forbindelse med løsning af både praktiske og teoretiske problemstillinger, og de skal kunne anvende sådanne algebraiske udtryk, herunder formler, til løsning af problemer. Fx kan sammenhængen mellem tid, strækning og fart eller sammenhængen mellem højde, sidelængder og areal i et trapez beskrives med algebraiske udtryk. I forbindelse med anvendelsen af algebraiske udtryk, skal eleverne kunne indsætte rationale tal i kendte og ukendte formler og beregne resultater, bl.a. med anvendelse af digitale værktøjer. (side 19)

Geometriske egenskaber og sammenhænge

I begyndelsen af trinforløbet arbejder eleverne med at bestemme og angive målforhold mellem ligedannede figurer. Heri indgår målforhold vedrørende længde, areal og rumfang samt undersøgelser af relationen mellem disse forhold med udgangspunkt i enkle polygoner og polyedre. (side 20)

Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for matematik²:

Matematik

Måling		Regnestrategier	
Eleven kan anvende modeller til forklaring af fænomener	Eleven har viden om modellering i naturfag	Eleven kan udføre sammensatte beregninger med rationale tal	Eleven har viden om regningsarternes hierarki
Geometriske egenskaber og sammenhænge		Kommunikation	
Eleven kan undersøge sammenhænge mellem længdeforhold, arealforhold og rumfangsforhold	Eleven har viden om ligedannethed og størrelsesforhold	Eleven kan kommunikere mundtligt og skriftligt med og om matematik med faglig præcision	Eleven har viden om fagord og begreber samt enkelt matematisk symbolsprog

¹ Link:
L.%C3%A6seplan%20for%20faget%20matematik_0.pdf

<https://www.emu.dk/sites/default/files/>

Dette undervisningsforløb henvender sig til elever på 7. - 9. klassetrin, samt 1. og 2. g. Forløbet berører områder indenfor matematik, hvor eleverne får indsigt i begreber, såsom kryptering, kodning og systematisering. Forløbet kan tilpasses elevernes forhåndsviden og niveau.

Undervisningsforløbet består af en række øvelser og opgaver, hvori eleven opnår forståelse for koder og kryptering. Eleven skal arbejde med Cæsarkoder og evt. Multiplikative- og Lineære koder.

For at få indsigt i koder og kryptering kan man starte med at se filmen "The Immitation Game" eller dokumentaren "Kodebryderen der hackede Hitler (The Codebreaker Who Hacked Hitler)". Det vil give eleven en forståelse af noget af vigtigheden og historikken bag koder og kryptering.

Introduktion til koder

Læren står med et problem: Et ulæseligt brev. Læreren uddeler en kodet tekst til eleverne og beder dem finde ud af hvad der står.

Efter 15 minutter samler læreren op på status og kommer med hints til hvordan man systematisk kan tilgå afkodningen ved hjælp af simpel alfabetforskydning, optælling af hyppigst forekommende bogstaver, ord etc. (Cæsar og frekvensanalyse).

Eksempel på brev tekst:

"lgi ibt k umqng k Btungx"

Her er alfabetet skubbet med 2 bogstaver (cæsarkode), så der står:

"Jeg går i skole i Årslev"

Klassen deles derefter op i to grupper. Den ene gruppe får en tekst de skal afkode vha.

Cæsar metoden og den anden gruppe skal benytte frekvensanalyse. Hver gruppe laver en kort præsentation af deres fremgangsmåde og stiller den anden gruppe en opgave.

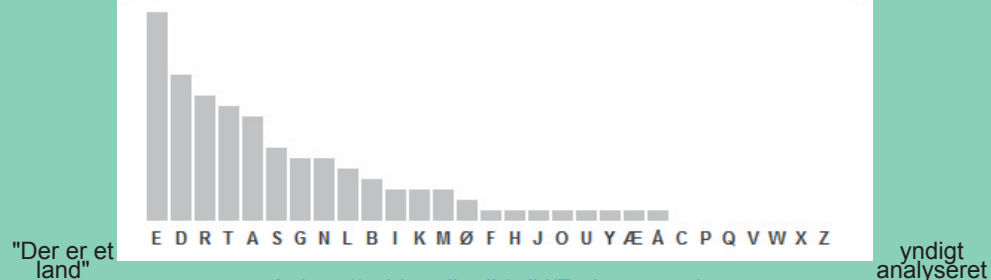
Kort om frekvensanalyse¹

Frekvensanalyse handler om at bryde koder ved hjælp af den statistiske bogstavsfordeling i et sprog, eks. udgør 'e' omkring 16 % i det danske sprog.

¹ Læs mere om frekvensanalyse her: <http://spjdrpedia.dk/wiki/Frekvensanalyse>

Eksempel på bogstavsfrekvens

DER ER ET YNDIGT LAND,
DET STÅR MED BREDE BØGE
NÆR SALTEN ØSTERSTRAND
DET BUGTER SIG I BAKKE, DAL,
DET HEDDER GAMLE DANMARK
OG DET ER FREJAS SAL



I dette eksempel optræder 'e' med en hyppighed på 17,5 %

Vi kan bruge denne viden om bogstavernes frekvens til at lave eller bryde koder, da vi kan bruge statestiken til at få indsigt i hvordan sproget og derved en tekst er sat sammen.

Hvis vi opsnapper en tekst der er krypteret ved hjælp af cæsarkode (se næste afsnit), så benyttes frekvensanalyse til at belyse hvordan den er krypteret og evt. bryde koden ved at gætte sig frem til hvordan koden er skruet sammen.

Øvelse 1

Hvad står der her?

For at løse opgaven skal eleven gætte sammenhængen mellem den kodet tekst og sproget, eks. at 'e' højest sandsynligt er det bogstav der optræder hyppist.

RSV MHÅKØUYNØX! AOØXSXQØØXO ØØ UKÅAOA. TOQ UYW, TOQ ÅJ, TOQ ÅOTØONO. |



I denne øvelse er svaret:

Tekst

hil cæsarkoden! terningerne er kastet. jeg kom, jeg
så, jeg sejrede.

Kodet tekst

rsv mhåkuynox! aoxsxqoxo ø ukåaoa. toq uyw, toq
åj, toq åotøono.

Kodet via <http://spjdrpedia.dk/wiki/C%C3%A6sarkode>

En ekstra udfordring mht. frekvensanalyse er indsættelse af ekstra uvilkårlige bogstaver i en kodet tekst, eks. "Dexr er et syndigt wland". Dette gør teksten sværere at bryde uden at hæve læsegraden betydeligt, da en analysen af frekvensen vil være skævvredet i forhold til de ekstra bogstaver.

Matematik og cæsarkoden

Kort fortalt går Cæsarkoden ud på at skubbe alfabetet. Hvis man fx skubber alfabetet 2 ser kodesystemet ud som:

Hvis man giver tallene i alfabetet numre, $a = 0$, $b = 1$, $c = 3$ og så videre, kan man beskrive Cæsar-koden ved hjælp af matematik:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å
c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å	a	b

Et skifte på 2 består så i, at man koder et bogstav ved hjælp af et bogstav, der har et nummer som er 2 større.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Bogstav 0 kodes med bogstav 2 (a kodes med c), bogstav 1 kodes med bogstav 3 (b kodes med d) og så videre. Men der er lidt et problem med at kode bogstav 27 og 28.

$27 + 2 = 29$, og der er jo ikke noget bogstav, som har nummer 29, og $28 + 2 = 30$, og der er heller ikke noget bogstav, som har nummer 30.

Klartekst	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å
nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
kodet nummer	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	0	1
Kode	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å	a	b

Hvis vi ser på den første tabel, kan vi se, at man i Cæsarkoden løser problemet ved at kode bogstav 27 med bogstav 0 (ø kodes med a) og bogstav 28 kodes med bogstav 1 (å kodes med b).

Hvis man vil bruge kodning ved hjælp af tal, skal man altså finde en måde regne på, som gør at 29 bliver til 0 og 30 bliver til 1.

For at beskrive den matematik, der ligger bag, skal eleven lære begrebet divisionsrest.

Eksempel

11:4 har en rest på 3, fordi $11 = 2 \cdot 4 + 3$

27:7 har rest 6, fordi $27 = 3 \cdot 7 + 6$

I regneark (Excel og GoogleSheets) er der en funktion, man kan benytte til at beregne divisionsrester med.

Hvis man vil beregne resten af 11 delt med 4, skal man bare skrive "`=rest(11;4)`"¹ i en celle i regnearket. Med hjælp fra regneark, er det altså nemt at beregne divisionsrester, uden at man behøver at finde ud af hvor mange gange divisor går op.

Når tallene i Cæsar-koden kommer over 28, skal man bare finde resten ved division med 29, så kommer de rigtige tal frem. Resten af 29 ved division med 29 er 0 og resten af 30 ved division med 29 er 1.

Øvelse 2: Brug regneark til at finde

- a) resten af 2342 ned division med 111
- b) resten af 239877 ned division med 2345

Eksempel

Hvis man prøver at regne på samme måde som i Cæsar-koden med tallene

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

og lægge 2 til alle tallene,

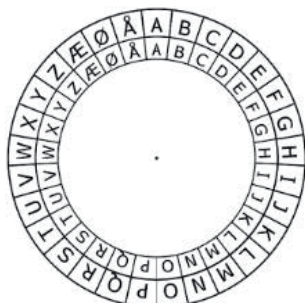
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	?	?

er problemet, at $13 + 2 = 15$ og $14 + 2 = 16$, og de tal er ikke med på listen af tal. Da der er 15 tal, kan man løse problemet ved at tage divisionsrest ved division med 15, og få:

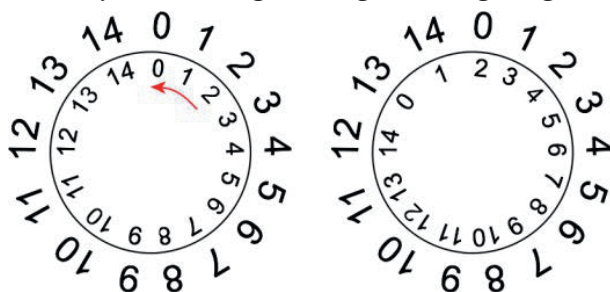
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	0	1

¹ Hvis man vil bruge GeoGebras regneark er kommandoen "`=Mod(11, 4)`" i stedet.

Nogen gange bruger man et "kodehjul" til at arbejde med Cæsar-kode, hvor man kan rotere det ene hjule i forhold til forskubbelsen i alfabetet man ønsker:



Kodehjulet kan også bruges udregninger:



Øvelse 3

I øvelsen skal du arbejde med de femten tal 0, 1, 2, ..., 13, 14. Hvis du kommer over 14 med en beregning, skal du benytte divisionsresten ved division med 15. Lav beregningerne, der viser hvad man får ud af at lægge 7 til alle tallene 0, 1, 2, ..., 13, 14.

Øvelse 4

I øvelsen skal du arbejde med de femten tal 0, 1, 2, ..., 13, 14. Hvis du kommer under 0 med en beregning, skal du, lige som i øvelse 2, benytte divisionsresten ved division med 15. Lav beregningerne, der viser hvad man får ud af at trække 3 fra alle tallene 0, 1, 2, ..., 13, 14.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
					2	3								

Eksempel

Man behøver ikke at nøjes med at lægge tallene sammen eller trække dem fra hinanden. Man kan også gange tallene med hinanden, bare man husker at tage divisionsrest ved division med 15, hvis man får et resultat, der er over 14 (eller mindre end 0).

For eksempel er $12 \cdot 2 = 24$. Hvis man finder resten af 24 ved division med 15 får man 9. Med vore måde at regne på, kan man skrive " $12 \cdot 2 = 9$ ".

Tilsvarende får man $7 \cdot 11 = 77$. Resten af 77 ved division med 15 er 2 (fordi $77 = 15 \cdot 5 + 2$), så man får " $7 \cdot 11 = 2$ ".

Øvelse 5

I øvelsen skal du arbejde med de femten tal 0, 1, 2, ..., 13, 14. Hvis du kommer over 14 eller under 0 med en beregning, skal du benytte divisionsresten ved division med 15. Husk, at du kan benytte kommandoen "rest" i et regneark til at finde divisionsresterne.

Lav beregningerne, der viser hvad man får ud af udregningerne

- a) $2 \cdot 7$
- b) $3 \cdot 12$
- c) $11 \cdot 12 + 3$
- d) $12 \cdot 4 - 8$

Eksempel

Man kan benytte vores nye måde at regne på til at lave Cæsarkoder på en nemmere måde.

Hvis man fx vil skifte hele alfabetet 7, skal vi bare beregne hvad vi får ud af at lægge 7 til alle tallene fra 0 til 28 og tage divisionsrest (ved division med 29, fordi der er 29 tal i spil) når vi kommer over 28.

Klartekst	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å
nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
kodet nummer	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	0	1	2	3	4	5	6
Kode	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å	a	b	c	d	e	f	g

Når vi lægger 7 til alle tallene benytter vi en kendt funktion $y = x + 7$ – altså en lineær funktion – til at lave udregningerne.

Eksempel

I Cæsar-koden lægger man et fast tal til alle bogstavernes talværdier. Man kan lave en ny slags kode ved i stedet at gange med et fast tal, og tage divisionsrest ved division med 29, når vi kommer over 28. Hvis man fx ganger med 3 får man

Klartekst	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å
nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
kodet nummer	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	2	5	8	11	14	17	20	23	26
Kode	a	d	g	j	m	p	s	v	y	ø	b	e	h	k	n	q	t	w	z	å	c	f	i	l	o	r	u	x	æ

Når vi ganger alle tallene med 3 benytter vi en kendt funktionstype $y = 3 \cdot x$ – altså en lineær funktion – til at lave udregningerne.

Øvelse 6

Brug koden i eksempel 5 til at afkode denne besked
"mk ko zeasz bnjm"

Øvelse 7

Brug en kode, hvor du ganger med 9 til at kode teksten "det tager lang tid"

Øvelse 8

Prøv at benytte regnearket som kan hentes her:

<https://tinyurl.com/yawutdoy>

til at lave øvelse 7.

Eksempel

Når nu vi kan lave koder hvor vi lægger faste tal til og andre koder, hvor vi ganger med et fast tal, kan vi naturligvis også kombinere de to metoder.

Fx kunne vi lave en kode, hvor vi ganger med 5 og lægger 8 til. Når vi ganger alle tallene med 5 og lægger 8 benytter vi en kendt funktionstype: $y = 5 \cdot x + 8$ – altså en lineær funktion – til at lave udregningerne.

Øvelse 9

Nedenfor er tabellen for koden med $5 \cdot x + 8$ begyndt. Lav tabellen færdig og brug den til at afkode denne kodede tekst:

"auxåg uj evpaqtupåg"

Klartekst	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	æ	ø	å
nummer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
kodet nummer	8	13	18	23	28	4	9	14	19	24	0	5	10	15	20	25	1	6	11	16	21	26	2	7	12	17	22	27	3
Kode	i	n		x	å	e	j				a	f	k	p			b	g	l	q					m				

Øvelse 10

Man kan også lave en kode ud fra funktionen $y = -7x - 11$.

Find ud af hvad bogstaverne a, b og c bliver kodet som.

Brug regnearket som kan hentes her:

<https://tinyurl.com/ycbvr58d>

til at finde resten af koden.

Øvelse 11

Brug ovenstående regnearket til at undersøge om du kan finde hele tal, a og b, i en lineær kode, så koden bryder sammen fordi nogle bogstaver skal kodes med samme bogstav.

Øvelse 12

Det danske alfabet har 29 bogstaver. Det engelske alfabet har kun 26 bogstaver.

Brug regnearket som kan hentes her:

<https://tinyurl.com/y6wsqxrK>

til at finde hele tal, a og b, i en lineær kode, så koden bryder sammen på engelsk, fordi nogle bogstaver skal kodes med samme bogstav. Hvorfor bryder koden sammen på engelsk for visse værdier af a og b – prøv at se nærmere på udregningerne.

Materiale til undervisningsforløbet

Om Cæsarkode

Matematikkens Dag: PROGRAMMERING OG KODER (s. 49 – 54). Red. Gert B. Nielsen, m.fl. Forlaget Matematik 2017

Yderlig læsning kan findes på:

<http://www.spjdrpedia.dk/wiki/Cæsarkode>

Hvis man vil arbejde med Cæsar-kode ét bogstav ad gangen, er der lavet et excel-regneark til det som kan findes her:

<https://tinyurl.com/y73ssgwp>

Man kan arbejde med en hel tekst på en gang i programmet på hjemmesiden

<https://www.cryptool.org/en/cto-ciphers/caesar>

Der er lavet en lille video, som viser hvordan det fungerer:

<https://tinyurl.com/y7y83ddu>

I arbejdet med Cæsarkoden kan man finde på at se på frekvenser af bogstaver. Det står der lidt om i materialet fra Matematikkens dag, og man kan også læse om det på

<http://www.spjdrpedia.dk/wiki/Frekvensanalyse>

Multiplikative koder

Hvis man vil arbejde med Multiplikative koder ét bogstav ad gangen, har er der lavet et excelregneark til det. Filen kan hentes her:

<https://tinyurl.com/yawutdoy>

På hjemmesiden 'Cryptool' kan man kode og afkode hel tekst også med dansk alfabet:

<https://www.cryptool.org/en/cto-ciphers/multiplicative>

Der er lavet en lille video, som viser hvordan det fungerer. Det er vigtigt at man indstiller alfabetet som vist i videoen, da programmet ellers ikke arbejder på den rigtige måde. Videoen kan hentes her:

<https://tinyurl.com/yd2vcua9>

Lineære koder

Hvis man vil arbejde med Multiplikative koder ét bogstav ad gangen, er der lavet et excel-regneark til det. Filen kan hentes her:

<https://tinyurl.com/ycbvr58d>

På hjemmesiden 'Crypto Corner' kan man kode og afkode hel tekst - også med dansk alfabet:

<http://crypto.interactive-maths.com/affine-cipher.html>

Der er lavet en lille video, som viser hvordan det fungerer. Det er vigtigt at man indstiller alfabetet som vist i videoen, da programmet ellers ikke arbejder på den rigtige måde. Videoen kan hentes her:

<https://tinyurl.com/ybhfsld2>

Yderligere om koder

En rimelig nemt tilgængelig hjemmeside om alle mulige koder er

<http://www.spjdrpedia.dk/wiki/Kategori:Koder>

Dette undervisningsforløb henvender sig til elever på 7. - 9. klassetrin. Forløbet berører områder indenfor fysik/kemi og matematik, hvor eleverne får indsigt i relevante begreber, såsom henfald og stråling, og kompetencer, såsom undersøgelsesmetoder, formidle resultater og benytte symboler. Forløbet kan tilpasses elevernes forhåndsviden og niveau.

Undervisningsforløbet består af fire 'arbejdskort' der tager udgangspunkt i radioaktivitet. Kortene har stigende sværhedsgrad, hvori eleven opnår forståelse af undersøgelsesbaseret dataopsamling, arbejde med modeller, og behandling af data. Formålet med forløbet er at styrke elevernes tværfaglige kompetencer i arbejdet med naturfag og den nye naturfaglige prøve i grundskolen.

Undervisningsforløbet er blevet til i et samarbejde mellem lærer Thor Hansen fra Tingkærskolen i Odense og John Schou fra LSUL. Forløbet er afviklet 9. klasse på Tingkærskolen i december 2016.

Overblik over de fire kort

De fire kort består af:

1. Radioaktivt henfald
2. Svækkelse af stråling
3. Behandling af data fra forsøgene
4. Matematikken i radioaktivt henfald

og indeholder relevant information og opgaver til eleverne. De vil blive beskrevet kort i de efterfølgende afsnit. Der er en progression i arbejdet med kortene, og eleverne bør først arbejde med 1 og 2. Derefter kan man vælge at arbejde med 3 eller 4, som det nu passer.

1. Radioaktivt henfald

Kortet består af en introduktion til henfald og sandsynlighed, samt en række opgaver. Eleverne skal bl.a. bruge terninger til at opnå indsigt til emnet. Der arbejdes her med følgende:

- benytte relevante symboler og repræsentationer
- belyse en problemstilling ved hjælp af repræsentationer og modeller
- undersøgelser af alfa, beta og gammastråling, halveringstid og flammefarver.
- at modeller forenkler og kun repræsenterer udvalgte aspekter

- af virkeligheden
- at modeller også bruges til at beskrive genstande og processer, som ikke kan iagttages direkte.
- at modeller kan være analogier og matematiske sammenhænge

Kortet kan hentes her:

<https://tinyurl.com/yc9uygep>



2. Svækkelse af stråling

Kortet består af en introduktion til eksperimenter, samt en række forsøg. Eleverne skal bl.a. forsøge at bestemme baggrundstrølingen. Der arbejdes her med følgende:

- anvende relevante undersøgelsesmetoder ved praktisk arbejde
- gennemføre en systematisk undersøgelse med observationer, eksempelvis med dataopsamling
- måling og opsamling af data med digital dataopsamling og andet elektronisk udstyr

Kortet kan hentes her:

<https://tinyurl.com/ybhuaazd8>



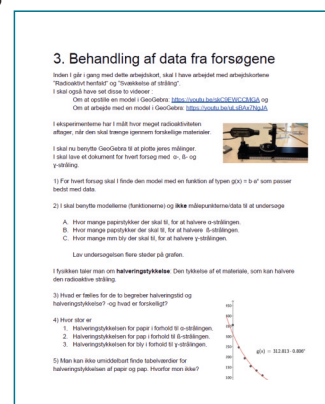
3. Behandling af data fra forsøgene

Kortet består af en række opgaver, hvor GeoGebra bruges. Eleverne skal bruge GeoGebra til at plote den indsamlede data og bl.a. bestemme halveringstidspunktet for papir, pap og bly. Der arbejdes her med følgende:

- behandle sine undersøgelsesresultater med relevante modeller
- benytte relevante symboler og repræsentationer
- belyse en problemstilling ved hjælp af repræsentationer og modeller
- matematiske sammenhænge
- eleverne skal anvende alsidige repræsentationer, herunder grafer og ikke-lineære funktioner, herunder enkle eksponentialfunktioner

Kortet kan hentes her:

<https://tinyurl.com/yb8kgo4o>



-
- gennemføre en systematisk undersøgelse med observationer, eksempelvis med dataopsamling
 - anvende og redegøre for kontrol af variable ved praktiske undersøgelser
 - strukturere og formidle undersøgelsesresultater
 - forholde sig kritisk til sine resultater og kunne redegøre for eventuelle fejlkilder
 - konkludere på sine undersøgelsesresultater, og anvende dem til belysning af en problemstilling

Modelleringskompetencen

Eleven kan...

- forklare forskel på model og virkelighed
- behandle sine undersøgelsesresultater med relevante modeller
- reducere kompleksitet og skabe overblik ved hjælp af modeller
- påvise og forklare årsagssammenhænge ved hjælp af modeller
- forholde sig kritisk til anvendte modeller
- benytte relevante symboler og repræsentationer
- belyse en problemstilling ved hjælp af repræsentationer og modeller
- designe en undersøgelse ud fra en model
- anviser ændringsforslag til en model på baggrund af viden fra egne undersøgelser

Fra læseplanen for fysik/kemi² henter forløbet i sine begrundelser fra (understregningerne fremhæver de områder, som berøres i forløbet):

Eleverne skal både på skolen og i felten arbejde med at observere, registrere, beskrive og opsamle data samt foretage systematiske undersøgelser med kontrol af variable.

Eleverne skal i samarbejde med andre designe, opstille og gennemføre undersøgelser. Derfor skal eleverne have viden om undersøgelsesmetoder i fysik/kemi, herunder destillering, elektrolyse, titrering, spektralanalyse samt måling og opsamling af data.

Eleverne skal arbejde med forskellige metoder til dataindsamling, herunder målinger foretaget med digital dataopsamling og andet elektronisk udstyr samt andres observationer. (side 4)

Sidst i trinforløbet arbejdes med radioaktivitet, atomkerneprocesser og processer i elektronsystemet gennem undersøgelser af alfa, beta og gammastråling, halveringstid og flammefarver. (side 5)

Om modellering: Eleverne skal lære, at modeller forenkler og kun repræsenterer udvalgte aspekter af virkeligheden. Eleverne skal anvende modeller til beskrivelse og forklaring og lære, at modeller også bruges til at beskrive genstande og processer, som ikke kan iagttages direkte. Modellerne omfatter bl.a. diagrammer, rumlige modeller, analogier, matematiske sammenhænge, tegninger, animationer og computer-simuleringer. (side 6)

² Link: <http://www.emu.dk/sites/default/files/Fysik-kemi%20læseplan.pdf>

Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for fysik/kemi³ tager forløbet afsæt i målparrerne:

Fysik/kemi

Partikler, bølger og stråling

Eleven kan undersøge typer af stråling	Eleven har viden om stråling	Eleven kan undersøge resultatet af processer på atomart niveau	Eleven har viden om atomkernen og elektronsystemet
Eleven kan med modeller beskrive ioniserende stråling	Eleven har viden om repræsentationer af atomkerner og stråling		

Der fokuseres især på Eleven kan undersøge resultatet af processer på atomart niveau og Eleven kan med modeller beskrive ioniserende stråling

Fra læseplanen for matematik⁴ henter forløbet i sine begrundelser fra (understregningerne fremhæver de områder, som berøres i forløbet):

Elevernes modelleringsprocesser skal i dette trinforløb omfatte strukturering og afgrænsning af den del af omverdenen, de skal modellere, opstilling af en problemstilling, oversættelse af problemstillingen til en matematisk model, matematisk behandling af modellen, tolkning af den matematiske model i forhold til den oprindelige problemstilling og kritisk analyse af modellen.

Undervisningen i modellering vedrører på de ældste klassetrin både hverdagen, naturen og samfundet og skal samlet set inddrage de tre stofområder alsidigt, sådan at eleverne både kan vurdere matematiske modeller og gennemføre modellerings-processer, der kræver færdigheder og viden vedrørende tal og algebra, geometri og måling samt statistik og sandsynlighed. (side 17)

Funktioner: Trinforløbet skal udvikle elevernes færdigheder i at kunne beskrive sammenhænge mellem to talstørrelser ved hjælp af funktioner. Heri indgår overvejelser over brugen af afhængige og uafhængige variable. Eleverne skal anvende alsidige repræsentationer, herunder tabeller, grafer, funktionsforskrifter og hverdagssproglige repræsentationer. Undervisningen skal bl.a. inddrage digitale værktøjer i fremstillingen af de forskellige repræsentationer og fokusere på oversættelse og sammenligning mellem dem. I begyndelsen fokuseres der på lineære funktioner, herunder lige- frem proportionale sammenhænge og stykkevis lineære funktioner. Senere i trinforløbet indgår ikke-lineære funktioner, herunder omvendt proportionale sammenhænge, andengradsfunktioner og enkle eksponentialfunktioner. I

⁴ http://www.emu.dk/sites/default/files/Læseplan%20for%20faget%20matematik_0.pdf

arbejdet indgår de forskellige funktioners anvendelse i beskrivelse af sammenhænge i omverdenen og funktionernes matematiske egenskaber bl.a. med brug af digitale værktøjer. (side 20)

Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for matematik⁵ tager forløbet afsæt i målparrerne:

Matematik

Funktioner		Modellering	
Eleven kan anvende ikke-lineære funktioner til at beskrive sammenhænge og forandringer	Eleven har viden om repræsentationer for ikke-lineære funktioner	Eleven kan gennemføre modelleringsprocesser, herunder med inddragelse af digital simulering	Eleven har viden om elementer i modelleringsprocesser og digitale værktøjer, der kan understøtte simulering

Der fokuseres især på Eleven kan gennemføre modelleringsprocesser og Eleven har viden om elementer i modelleringsprocesser.

⁵ <http://www.emu.dk/omraade/gsk-lærer/ffm/matematik>

Dette undervisningsforløb tager udgangspunkt i samspil mellem fagene Natur/Teknologi (N/T) og matematik for 5 - 6. klassetrin. Den overordnede ide i forløbet er, at matematikfaget skal være med til at kvalificere arbejdet i N/T. At eleverne skal opdage, at de også har brug for matematik i arbejdet med naturfaglige problemstillinger. I beskrivelsen af forløbet vil vi ikke komme ind på alle detaljer i arbejdet med N/T, men nøjes med at lave nedslag i de aktiviteter, som i særlig grad fokuserede på at integrere matematik i arbejdet med N/T.

Ideen til undervisningsforløbet udsprang af lærernes oplevelser af, at elever generelt har svært ved at skifte mellem enheder i deres arbejde med naturfagene i udskolingen. At sammenhænge mellem fx liter og kubikmeter er meget kryptisk.

Omregninger mellem enheder (også ikke-standardenheder) har været en del af arbejdet med at bestemme rumfang i arbejdet med affald og håndteringen af affald.

Matematik har således været en vinkel på arbejdet med affaldshåndtering i Odense. Matematikken understøttede elevernes arbejde med de kvantitativesider af affaldshåndteringen: Mængden af affald, størrelsen af affaldsbeholdere og containere, geometri og målestoksforhold i forbindelse med engenbrugsstation. Alle disse sammenhænge rummede muligheder for at eleverne kunne arbejde med måling og måleenheder.

Det meste arbejde med matematikken skete inden for rammerne af problemstillingerne fra Natur/Teknologi, og eleverne lagde ikke nødvendigvis mærke til at de havde matematik på skemaet. Der var dog elementer af mere ren matematisk karakter, for at hjælpe eleverne med at holde fast i og tydeliggøre de erfaringer de gjorde gennem arbejdet med N/T.

Undervisningsforløbet var baseret på en undersøgende og eksperimenterende arbejdsform hvor der også blev arbejdet målrettet med at forankre den matematiske og naturfaglige viden.

Undervisningsforløbet blev afviklet hos to 6. klasser på Tingkærskolen i Odense i efteråret 2015 med lærerne Ruth Lisa Asmussen (mat.), Dorte Bruun (N/T) og Stefan Aadal Larsen (mat. og N/T) for planlægningen og undervisningen. Fra LSUL deltog John Schou med udvikling af materialer og i noget af undervisningen.

*Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for Natur/
Teknologi¹ 5. – 6. klassetrin:*

Natur/Teknologi

Teknologi og ressourcer

Eleven kan identificere stoffer og materialer i produkter	Eleven har viden om stoffers og materialers egenskaber og kredsløb	Eleven kan beskrive interessemudsætninge r ved produktionsforhold	Eleven har viden om produktioners afhængighed og påvirkning af naturgrundlaget
Eleven kan identificere ressourcebesparende teknologier	Eleven har viden om enkel miljøvurdering af produkter og produktioner		

Perspektivering i naturfag

Eleven kan sætte anvendelse af natur og teknologi i et bæredygtigt perspektiv	Eleven har viden om enkle principper for bæredygtighed
---	--

Mål for den enkelte elev

- skal kende kredsløbet for forskellige typer affald
- skal vide, hvordan affald håndteres i Odense

Læringsmål for grupper

- skal skal definere et affaldsproblem, finde fakta om det og selv komme med et løsningsforslag
- skal kunne fortælle andre om affaldsproblemer og præsentere resultater af dine egne undersøgelser

¹ <https://www.emu.dk/omraade/gsk-l%C3%A6rer/ffm/naturteknologi>

Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for Matematik² 4. – 6. klassetrin:

Matematik

Geometrisk tegning

Eleven kan anvende skitser og præcise tegninger	Eleven har viden om stoffers og materialers egenskaber og kredsløb
---	--

Måling

Eleven kan anslå og bestemme rumfang	Eleven har viden om metoder til at anslå og bestemme rumfang
--------------------------------------	--

Forløbet berører følgende punkter fra Forenklede Fælles Mål for Matematik² 7. – 9. klassetrin:

Geometriske egenskaber og sammenhænge

Eleven kan undersøge sammenhænge mellem længdeforhold, arealforhold og rumfangsforhold	Eleven har viden om ligedannethed og størrelsesforhold.
--	---

Mål for den enkelte elev

- Du har viden om hvordan man kan beregne rumfang
- Du har viden om at rumfang kan måles med forskellige enheder
- Du har viden om hvordan man omregner mellem forskellige måleenheder
- Du har viden om målestoksforhold

Matematikken i forløbet

Som nævnt tidligere, vil vi ikke komme ind på detaljerne i arbejdet med Natur / Teknologi. Vi vil nøjes med at lade målene og listen, med de mangeartede input til arbejdet med de naturfaglige problemstillinger, give læseren en fornemmelse af, hvad der har været arbejdet med.

Det matematiske indhold er beskrevet i fire opgaveark: "Fra skraldespand til Fynsværket", "Genbrugsstationen", "Fra liter til kubikmeter" og "Matematisk fokus på at skifte måleenhed", som er bilag til denne tekst. De to første

² <https://www.emu.dk/omraade/gsk-l%C3%A6rer/ffm/matematik>

fokuserer på elevernes horisontale matematisering og de to sidste på den vertikale matematisering¹. De fire tekster blev ikke brugt, og skulle heller ikke bruges, i deres helhed, men var tænkt som ideer, læreren kunne benytte sig af til at få matematik integreret på en naturlig måde i arbejdet med N/T.

Undervejs i forløbet brugte vi følgende aktiviteter:

- Beregninger på forskellige typer af affaldsspande og skraldespande. Eleverne skulle tegne en skitse af og beregne rumfanget af deres skraldespand hjemme i køkkenet og af deres udendørs affaldsspand.
- Eleverne skulle føre statistik over hvor meget affald de producerer i deres hjem i løbet af en uge. Statistikken skulle bl.a. benyttes til at regne på hvor meget affald de producerer over længere tidsperioder, hvor meget det ville fylde og hvor meget man kunne spare om året, hvis man producerer en eller flere poser affald mindre pr. uge.
- Eleverne skulle opmåle en affaldscontainer på skolen og lave en video, hvor de viser hvorledes de benytter opmålingen til at beregne containerens rumfang.
- Opmåling af en genbrugsstation med beregninger af rumfang. Eleverne byggede en model af genbrugsstationen ud fra målingerne – fokus på målestoksforhold.
- En elevgruppe fandt selv på følgende problem i relation til en terning af presset aluminium som de fik fat i under besøget på H J Hansen genvinding: Hvor mange sodavandsdåser er der i terningen?

Arbejdet i undervisningsforløbet

Målene blev søgt opnået gennem elevernes arbejdede med disse overordnede spørgsmål:

- Hvad sker der med vores affald, når skraldevognen har hentet det?
- Hvor meget affald "producerer" din familie? Hvor meget gør hele Odense?
- Hvorfor sorterer vi affald på genbrugspladserne?
- Hvorfor sorterer vi som vi gør?
- Hvordan fungerer en genbrugsstation?

Disse spørgsmål blev bl.a. belyst i det oprindelige undervisningsforløb gennem elevernes:

- besøg på genbrugsstationen Snapindgården
- besøg hos H. J. Hansen genvinding
- besøg på Fynsværket
- konstruktion af en genbrugsstation i miniature

³ Se fx. http://www.fisme.science.uu.nl/en/wiki/index.php/Realistic_Mathematics_Education

- ideer til forbedring af genbrugsstationen
- undersøgelse af affaldshåndtering på egen skole
- arbejde med LEGO Mindstorm og med First Lego League 2015.
- arbejde med at bestemme rumfang
- arbejde med at skifte fra én måleenhed til en anden
- arbejder med at bygge modeller i størrelsesforhold

Opgaveark

Fra skraldespand til Fynsværket

Opgaverne i dette ark er tænkt som en inspiration til hvad man kan arbejde med for at integrere matematikken i arbejdet med de faglige emner i Natur og Teknologi. Man behøver ikke at give eleverne opgaverne på et "klassisk" opgaveark, som de skal løse fra ende til anden. Opgaverne er et redskab til læreren med ideer til hvilke undersøgelser man kan sætte eleverne i gang med.

Link til opgaveark: <https://tinyurl.com/yb68cej5>

Fra liter til kubikmeter

Det er ideen med opgaverne på opgavearket, at eleverne skal arbejde sig frem til egne regneregler for omregning mellem liter og kubikmeter.

Det er vigtigt at udfordre elevernes forklaringer undervejs i arbejdet. At få forskellige elevers forklaringer gjort synlige og at få eleverne til at sammenligne forskellige forklaringer, for at finde ligheder og forskelle på måderne at tænke på.

Link til opgaveark: <https://tinyurl.com/ydyycdu5>

Genbrugsstationen

Opgaverne på arket er et oplæg til et matematikindhold i elevernes besøg på en genbrugsstation. Det vigtigste er, ud over opmålingen de matematiske perspektiver, der kan være i at bygge en model af genbrugsstationen i LEGO.

Link til opgaveark: <https://tinyurl.com/ychlmvow4>

Matematisk fokus på at skifte måleenhed

Opgaverne på arket handler om rumfang af terninger og om at skifte til andremåleenheder, selvom det ikke bliver sagt direkte.

Vi skal sikre os at eleverne er skarpe på, at en terning er en kasse med lige lange sider.

Det er vigtigt at eleverne udfordres til at benytte multiplikative strategier til at løse de første opgaver.

Link til opgaveark: <https://tinyurl.com/y73gfff4>

Flytningsgeometri er et godt fagligt område for integration af IT i Matematik for 6. klassetrin ved hjælp af det dynamiske geometriprogram GeoGebra. Programmet har indbyggede funktioner, der gør det nemt og præcist at lave spejlinger, drejninger og parallelforskydninger, og GeoGebra faciliterer derigennem, at elever arbejder undersøgende og eksperimenterende med fx geometriske mønstre. Derfor faldt valget på netop dette faglige område.

Dette er en beskrivelse af et undervisningsforløb om geometri, hvor man indrager IT i matematik undervisningen. Forløbet blev afholdt i 6. klasse på Tingkærskolen i Odense i 2016. Deltagerne i forløbet var de to lærere Ruth Lisa Asmussen og Stefan Aadal Larsen og eleverne i 6 a. og 6 b. For LSUL deltog John Schou i planlægningen og udviklingen af materialer og i den afsluttende fordybelsesdag, hvor eleverne arbejdede med mønstre.

Undervisningsforløbet tager afsæt i Folkeskolens Forenklede Fælles Måls formuleringer om geometri på mellemtrin, specielt i området Placeringer og flytninger¹:

Matematik

Geometri og måling

Eleven kan fremstille mønstre med spejlinger, parallelforskydninger og drejninger	Eleven har viden om metoder til at fremstille mønstre med spejlinger, parallelforskydninger og drejninger, herunder med digitale værktøjer
---	--

Disse mål uddybes i læseplanen²:

Sidst i trinforløbet arbejder eleverne med spejlinger, parallelforskydninger og drejninger i tilknytning til mønstre. Eleverne skal bl.a. kunne:

Undersøge og beskrive flytninger i mønstre
Gengive mønstre, der indeholder flytninger.
Skabe egne mønstre ved hjælp af flytninger.

Eleverne skal kunne anvende koordinatsystemet til at beskrive placeringer af flyttede figurer. I deres gengivelse af mønstre og i deres egne mønstre med flytninger skal de bl.a. kunne anvende digitale værktøjer, herunder et dynamisk geometriprogram.

Udgangspunktet for at gå i gang med et tværfagligheden mellem matematik og IT i et undervisningsforløb var egentlig ikke de specifikke mål for

¹ Link: <http://www.emu.dk/omraade/gsk-laerer/ffm/matematik/4-6-klasse/geometri-og-maaling>

² Link: https://www.emu.dk/sites/default/files/L%C3%A6seplan%20for%20faget%20matematik_0.pdf

flytningsgeometri på mellemtrinnet, men at lærerne havde et ønske om, i højere grad, at få IT integreret i matematikundervisningen. Læseplanen (ibid.) er ret præcis om inddragelsen af IT: "I undervisningen skal der bl.a. indgå måleinstrumenter, tegneredskaber og digitale værktøjer, herunder regneark og et dynamisk geometriprogram". Flytningsgeometri er et godt fagligt område for integration af IT i form af det dynamiske geometriprogram GeoGebra. Programmet har indbyggede funktioner, der gør det nemt og præcist at lave spejlinger, drejninger og parallelforskydninger, og GeoGebra faciliterer derigennem, at elever arbejder undersøgende og eksperimenterende med fx geometriske mønstre. Derfor faldt vores valg på netop dette faglige område.

Målene for forløbet blev:

1. Du kan arbejde med spejlinger, drejninger og parallelforskydninger i GeoGebra.
2. Du kan lave dit eget geometriske mønster i GeoGebra ved hjælp af spejlinger, drejninger og parallelforskydninger.

Forløbet faldt i to dele. En del, hvor eleverne skulle blive fortrolige med at arbejde med emnet i GeoGebra, og en del, hvor eleverne skulle arbejde undersøgende og kreativt med at skabe deres egne mønstre. Første del blev afviklet over to lektioner. Anden del blev afviklet på en fordybelsesdag, hvor eleverne arbejdede med emnet fra kl. 9 til kl. 14.

Del 1

Tidligere på skoleåret havde klasserne arbejdet med flytninger uden brug af geometriprogram. De havde arbejdet med emnet som det bliver præsenteret i deres lærebog³. Eleverne havde derfor allerede arbejdet med spejlinger, drejninger og parallelforskydninger og havde et vist kendskab til det matematiske indhold. Vi valgte at tage afsæt i denne viden og i de helt specifikke aktiviteter, eleverne havde arbejdet med tidligere, idet vi redidaktiserede de allerede kendte aktiviteter mod integration af IT. Det var således kun brugen af IT, der for alvor var ny for eleverne.

Redidaktiseringen bestod i, at vi udarbejdede en hjemmeside, hvor vi havde omformet de opgaver, som eleverne allerede kendte fra deres lærebog til dynamisk geometri i GeoGebra. Eleverne kunne derfor koncentrere sig om at udføre flytningerne i GeoGebra, uden at de samtidig skulle sætte sig ind i helt nye problemstillinger. Til hjemmesiden lavede vi også små instruktionsvideoer, som eleverne kunne se for bl.a. at få hjælp til, hvordan man laver spejlinger, drejninger og parallelforskydninger i GeoGebra:

<https://sites.google.com/a/ucl.dk/tingkaer1>

og alle øvelserne er de samme, som man kan finde i elevernes matematikbog⁴. Sammenkoblingen af opgaver og aktiviteter med de små instruktionsvideoer på hjemmesiden fungerede fortrinligt. Eleverne brugte videoerne flittigt, og lærerne fik derved bedre tid til at udfordre og støtte eleverne med det faglige.

³ Matematrix 7. Grundbog af Tomas Højgaard m.fl. Alinea

⁴ Alle klip fra Matematrix 7 på de to hjemmesider er gengivet med tilladelse fra Alinea

Del 2

Anden del af forløbet lagde op til, at eleverne skulle arbejde mere selvstændigt og undersøgende med brug af GeoGebra. Eleverne havde en hel fagdag til arbejdet. Opgaven til eleverne var:

Lav dine egne mønstre med spejlinger, drejninger eller parallelforskydninger i GeoGebra. Dine mønstre skal printes ud, og benyttes til en udstilling på skolebiblioteket.

Undervisningen tog afsæt i en klassesamtale om, hvad man forstår ved et mønster, hvor eleverne kom med bud på, hvad de forstår ved et mønster. Der kom gode ideer fra nogle af eleverne: gentagelser, symmetri, spejling, drejning, parallelforskyde kom bl.a. på banen. Læreren tog afsæt i elevernes udsagn og hjælp i klassesamtalen eleverne med yderligere at indkredse, hvad man kunne forstå ved et mønster i matematisk sammenhæng.

Der var gået omtrent en måned mellem første og anden del af forløbet, så vi anså det for bedst, hvis vi startede elevernes selvstændige arbejde med en kort repetition af, hvordan man arbejder med de væsentligste teknikker i GeoGebra. Atter tog vi udgangspunkt i opgaver fra elevernes matematikbog, som vi redaktiserede mod brug af it. Det var væsentligt, at eleverne ikke i første omgang skulle bruge tid og energi på at tegne figurer, som de derefter flyttede vha. spejlinger, drejninger og parallelforskydninger. Det var blot hensigten, at eleverne skulle genopfriske teknikkerne på computeren, så de var fortrolige med dem, inden de skulle til at lave deres egne mønstre. Som til første del af forløbet havde vi lavet en hjemmeside, hvor vi havde små instruktionsvideoer og i øvrigt tog afsæt i lærebogen:

<https://sites.google.com/a/ucl.dk/tingkaer2/home>

Efter arbejdet med de indledende opgaver lagde eleverne en meget koncentreret arbejdsindsats i at udarbejde mønstre. Det var en motivation for de fleste, at de kunne lave noget der blev "pænt". Eleverne var også flittige til at benytte instruktionsvideoerne, hvis de var i tvivl om brugen af GeoGebra.

Som undervisere oplevede vi, at eleverne ikke havde berøringsangst over for at arbejde undersøgende med deres egne ideer, og at vi blev mere lige med eleverne, når de forsøgte at udtrykke deres ideer. Spørgsmål som "Hvordan får man cirkler til at ligge oven på hinanden i en bestemt rækkefølge?" blev vigtige for eleverne, og når underviserne ikke lige kunne svare, måtte vi prøve at finde ud af det sammen med eleverne. Elevers spørgsmål om "hvordan..." blev nogle gange også besvaret med "Det ved jeg ikke lige. Prøv at finde ud af det, og husk, at fortælle mig hvordan du løste problemet" – der er meget læringspotentiale i, at elever selv finder ud af, og formidler deres løsninger.

Vi oplevede også, at elever fandt på forskellige løsninger til samme type af problemer, og at de smarte løsninger hurtigt bredte sig i klassen.

De eneste frustrationer i forløbet var IT-tekniske, da eleverne arbejdede på forskellige platforme (Windows, Mac, Chromebook og iPad). Dette kan skabe forvirring, da GeoGebra operer forskelligt på de forskellige platforme. Et eksempel er hvordan man gemmer filer på de forskellige platforme, hvilket kan

Nedenfor kan man se et lille udvalg af elevarbejder, der vidner om, at eleverne efter forløbet

- [illegible]

Dette undervisningsforløb henvender sig til elever på 7. - 9. klassetrin. Det tager udgangspunkt i balance og udspringer fra et ønske om at tydeliggøre, at det eleverne arbejder med i matematik og fysik har meget til fælles, og et ønske om at benytte programmering som et redskab i arbejdet med de to fag. Vippen udmærker sig bl.a. ved, at de indgående variable (afstande og masser) er velkendte fra hverdagserfaringer og er umiddelbart forståelige for eleverne. Fænomener som fx strømstyrke, spænding og elektrisk modstand er langt mere abstrakte og derfor sværere at håndtere i en modelleringssituation.

Undervisningsforløbet består af fem faser med hver sit tema. Den grundlæggende ide i forløbet er at styrke elevernes tværfaglige forståelse af Fysik/Kemi og matematik, samt programmering. Forløbet blev afholdt på Tingkærskolen og deltagerne i forløbet var lærer Thor Hansen og to 8. klasser. Fra LSUL medvirkede John Schou med udvikling af materialer og som deltager i ca. halvdelen af undervisningen. .

Dette undervisningsforløbet er afledt af det velkendte transfer-problem mellem fag, hvor elever opdager ikke nødvendigvis, at det, de laver i matematik, har nogen relevans for det, de laver i Fysik/Kemi – og omvendt. Fx er ligningsløsning i matematik og behovet for at kunne isolere en variabel i en formel fra fysikundervisningen for mange elever to vidt forskellige universer, som har meget svært ved at mødes i elevernes bevidsthed.

Et andet ønske med forløbet var for det første afledt af, at programmering i et vist omfang er et mål for undervisningen i Fysik/Kemi, og for det andet af, at mange af elever allerede har arbejdet med at programmere i Scratch og MIT App Inventor.

Det var samtidig et ønske, at eleverne skulle arbejde undersøgende, så de selv skulle igennem dele af en modelleringsproces for at forstå og beskrive de fysiske sammenhænge og den matematiske beskrivelse af dem.

Mål for forløbet

Målene for forløbet er hentet fra Forenklede Fælles Mål¹ for både fysik/kemi og matematik 7-9 klasse.

Fysik/kemi

Undersøgelser i naturfag		Produktion og teknologi	
Eleven kan formulere og undersøge en afgrænset problemstilling med naturfagligt indhold.	Eleven har viden om undersøgelsesmetoders anvendelsesmuligheder og begrænsninger	Eleven kan designe og gennemføre undersøgelser vedrørende elektronisk og digital styring.	Eleven har viden om elektroniske kredsløb, simpel programmering og transmission af data.

¹ <https://www.emu.dk/omraade/gsk-l%C3%A6rer/>

Undersøgelse i naturfag gemmen eksperimenter med vippen og indsamling af data for situationer, hvor der er ligevægt, undersøger eleven en afgrænset problemstilling systematisk.

Produktion og teknologi gennem arbejdet med at programmere i Scratch kommer eleven i berøring med simpel programmering. Dette uanset om eleven kommer i gang med at programmere regnemaskiner i relation til vippeproblemet, om eleven visualiserer vippeproblemet eller om eleven, for den sags skyld, ikke når mere end at arbejde med tutorials om programmering med Scratch.

Modellering i naturfag

Eleven kan anvende modeller til forklaring af fænomener og problemstillinger i naturfag.	Eleven har viden om modellering i naturfag.	Eleven kan vælge modeller efter formål.	Eleven har viden om karakteristika ved modeller i naturfag.
--	---	---	---

Gennem arbejdet med at finde data for balancerende vipper kan eleverne komme i berøring med modeller på flere niveauer, spændende fra rent kvalitative forståelser til matematisk, præcist formulerede relationer. Der er mulighed for at elever kan opdage og beskrive kvalitative sammenhænge i stil med "den tungeste skal være tættest på midten". Eleverne kan udtrykke mere kvantitative forståelser som "hvis den ene er dobbelt så tung som den anden, skal den anden være dobbelt så langt ude", og endelig kan eleverne udtrykke sig mere formelt gennem matematikkens sprog med udsagn som "masse gange afstand = masse gange afstand" og formeludtryk som " $l_1 \cdot m_1 = l_2 \cdot m_2$ ", eks:

Hvis vægten er dobbelt skal afstanden også være de

$$M_1 \times l_1 = M_2 \times l_2$$

Argumentation

Eleven kan formulere en påstand og argumentere for den på et naturfagligt grundlag.	Eleven har viden om påstande og begrundelser.
---	---

Som beskrevet under modelleringen, bliver eleverne bragt i en situation hvor de kan opstille en naturfaglig hypotese og prøve den efter. Det uanset om hypotesen/modellen er formuleret kvalitativt eller kvantitativt.

Matematik

Modellering

Eleven kan gennemføre modelleringsprocesser, herunder med inddragelse af digital	Eleven har viden om elementer i modelleringsprocesser og digitale værktøjer, der kan understøtte simulering.
--	--

Som beskrevet under modellering i fysik/kemi, er modelleringskompetence central i arbejdet. Det er ikke alle faser af en matematisk (eller for den sags skyld en naturvidenskabelig) modelleringsproces, der er lige stærkt repræsenteret i forløbet. Vippe-problemet er allerede afgrænset i forhold til virkeligheden, og der er på forhånd sat skarpt fokus på, at det er de to masser og de to afstande, der er det centrale. Samtidig er problemet dog ikke matematiseret færdigt, idet det stadig er op til eleverne at finde fornuftige (matematiske) måder at udtrykke deres observerede sammenhænge.

Ligninger

Eleven kan udvikle metoder til løsninger af ligninger.	Eleven har viden om strategier til løsning af ligninger.	Eleven kan opstille og løse ligninger og enkle uligheder.	Eleven har viden om ligningsløsning med og uden digitale værktøjer.
--	--	---	---

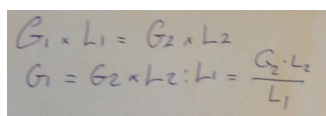
Når man begynder at stille spørgsmål til den matematiske formulering af modellen ("masse gange afstand = masse gange afstand" eller $l_1 \cdot m_1 = l_2 \cdot m_2$), hvor man kender tre af de indgående talstørrelser, og ønsker at bestemme hvad den sidste skal være, for at der bliver balance, dukker ligninger op helt af sig selv. Eleverne kan opstille og løse ligninger ud fra konkrete tal, og de har mulighed for at efterprøve om løsningen er korrekt ved at placere masserne på vippen i de relevante afstande. Eleverne kan lave ligninger ud fra tre af tallene i deres egne observationer af balance, og tjekke om de kan beregne det fjerde tal. Det er endda muligt at opstille formler, der løser problemerne med at finde en ukendt masse eller en ukendt afstand.

Når eleverne arbejder med at programmere regnemaskiner i Scratch, bliver de sidst omtalte formler også centrale.

Formler og algebraiske udtryk

Eleven kan beskrive sammenhænge mellem enkle algebraiske udtryk og geometriske	Eleven har viden om geometriske repræsentationer for algebraiske udtryk.	Eleven kan udføre omskrivninger og beregninger med variable.	Eleven har viden om metoder til omskrivninger og beregninger med variable, herunder med digitale værktøjer.
--	--	--	---

Som beskrevet ovenfor om ligninger, kan eleverne komme til at arbejde med formler og formlers betydning. De indgående variable har alle en konkret og nemt forståelig, fysisk betydning. Så selvom der ikke kun er tale om "geometriske repræsentationer", er eleverne klart i berøring med målet i fase 1 (venstre side af "Formler og algebraiske udtryk"), da der er tale om, at de benytter variable i meningsfyldte sammenhænge. At fase 2 (højre side) også er i spil er der allerede gjort rede for i forbindelse med ligninger:


$$G_1 \times L_1 = G_2 \times L_2$$
$$G_1 = G_2 \times L_2 : L_1 = \frac{G_2 \cdot L_2}{L_1}$$

Undervisningsmaterialet

Oversigt og kommentarer til læreren

Undervisningsforløbet består af fem faser med tilhørende opgaver og forløbet benytter simuleringen:

<http://phet.colorado.edu/en/simulation/balancing-act>

1. fase

Start med en samtale om vipper, om hvorfor op/ned. Hvordan man kan ændre balance uden at ændre 1) masserne 2) placeringen af masserne.

Hvis der er der en vippe i skolegården, bør den bruges – sæt en tung voksen og et barn på vippen, og få forslag til hvordan man kan få det til at balancere. Træk kraftigt på de erfaringer eleverne har fra virkelighedens vipper.

2. fase

Her benyttes materialet:

1. Undersøgelse af balance på en vippe (se materialerne i næste afsnit)

Styrede eksperimenter: Eleverne arbejder frem mod opdagelse af $l_1 \cdot m_1 = l_2 \cdot m_2$ – men ingen matematik her ud over hvad eleverne eventuelt selv finder på at benytte!

Efterfølgende samtale om hvordan eleverne forstår og tænker om sammenhængene.

Kobling tilbage til samtalen i 1 fase, og hvad de syntes var væsentligt for problemet dengang. Hvad er vigtigt for at forstå problemstillingen, og hvad er uvæsentligt.

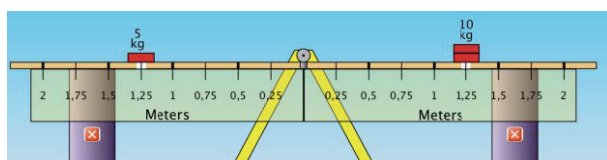
3. fase

Her benyttes materialerne:

2. Forudsige balance på en vippe
3. Forudsige balance på en vippe II

Styrede eksperimenter: Forudsige og prøve efter. Opstille en teori og undersøge om den holder stik.

Eleverne skal forudsige og derefter efterprøve om forudsigelserne holder stik.



Revidere grundlaget for forudsigelserne om nødvendigt.

Fx vil der være balance?

Løbende og afsluttende samtaler med eleverne om deres teorier, og hvordan de har testet dem. Er teorierne ens? Hvordan er de ens? Hvordan er de forskellige?

Samtale om de væsentlige parametre, uvæsentlige parametre, om at vælge gode navne til parametre, når man skal opstille en matematisk formuleret teori.

En god måde at udfordre elevernes forståelse på dette trin er, at lade dem sætte en af "pakkerne" med ukendt masse, som programmet giver mulighed for, på den ene side af vippen og bede dem finde frem til pakkens masse ved at benytte mursten (med kendt masse) på den anden side af vippen. Man bør udfordre eleverne til at skrive op, at der fx skal gælde $0,5 \cdot \text{"pakkens masse"} = 1,5 \cdot 5 \text{ kg}$.

På denne måde kan eleverne komme tættere på at formulere sig i generelle termer om $\text{masse}_1 \cdot \text{afstand}_1 = \text{masse}_2 \cdot \text{afstand}_2$.

4. fase

Her benyttes materialet:

4. Formel for balance på en vippe

Eleverne skal arbejde med at formulere en matematisk sammenhæng og bruge den til at regne med, og de skal tjekke om den matematisk formulerede teori passer med alle deres data.

Efterfølgende samtale om hvordan eleverne har formuleret deres teori i matematikprog, og hvordan forskellige formuleringer spiller sammen. Er de ens eller er de forskellige? Kan de være forskellige og stadig udtrykke den samme teori?

5. fase

Her benyttes materialet:

5. Lav en app om balance på en vippe

Eleverne skal lave en regnemaskine eller en visualisering af balance/ubalance ved hjælp af Scratch (<https://scratch.mit.edu>) eller MIT App Inventor (<http://appinventor.mit.edu/explore/>).

Hvis eleverne ikke har arbejdet med Scratch tidligere, kan man finde gode tutorials på Hour of Code (<https://scratch.mit.edu/hoc>).

5. fase kan laves på mange niveauer – der er mange differentieringsmuligheder. Eleverne kan fx lave:

En simpel udregning i en lille app.

Et program, der tager mod et tal og laver en beregning.

Et program, der tager mod tre tal og laver en udregning.

Et program, der kan lave flere forskellige beregninger.
Et program, der visualiserer situationen på grundlag af beregninger.

Man kan også tage afsæt i eksisterende programstumper, som eleverne kan bruge til inspiration, eks:

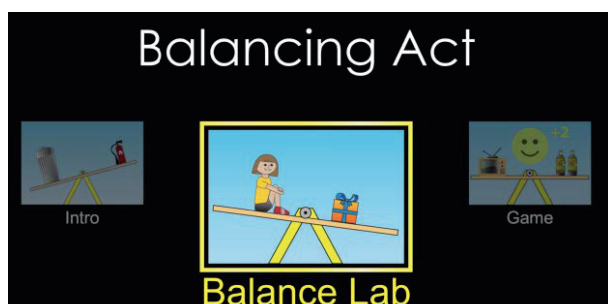
Addition: <https://scratch.mit.edu/projects/87915325/>
Multiplikation: <https://scratch.mit.edu/projects/87914202/>
Division: <https://scratch.mit.edu/projects/87792647/>
Ændringer: <https://scratch.mit.edu/projects/88014917/>
Subtraktion: <https://scratch.mit.edu/projects/77401340/>
Regnemaskine: <https://scratch.mit.edu/projects/92888466/>

På de efterfølgende sider følger opgaver og information til hver fase. Til sidst i dette undervisningsforløb vil der være et overblik over hvilke idéer og yderligere emner der kan komme i spil under forløbet, samt tre idéer til yderligere undervisningsforløb.

Opgaver

1. Undersøgelse af balance på en vippe

I skal undersøge, om I kan få en vippe til at balancere. I skal bruge programmet "Balancing Act" i jeres undersøgelser.



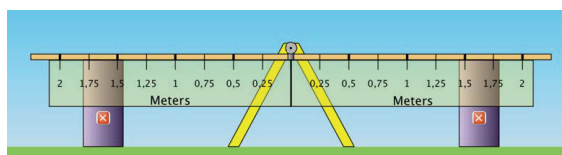
http://phet.colorado.edu/sims/html/balancing-act/latest/balancing-act_en.html

Det er vigtigt, at I får lavet de rigtige indstillinger.

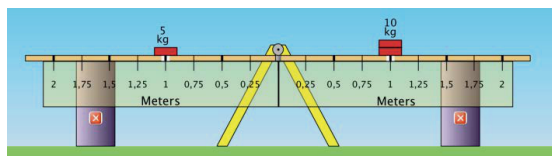
I skal vælge den del af programmet, der handler om "Balance Lab"

I skal vælge at vise "Mass Labels" og "Rulers" og at få vist murstenene.

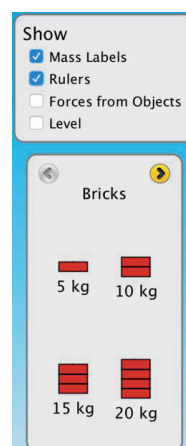
Vippen skal se ud som på dette billede:



- A. Start med at placere 5 kg på den ene side af vippen og 10 kg på den andenside af vippen.
Hvor kan masserne placeres, så vippen er i balance?



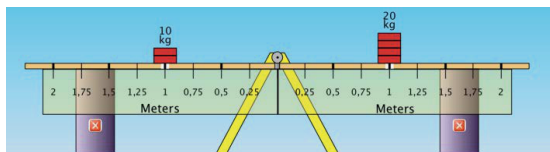
Klik på "Remove Supports" for at få vippen fri.



Lav en tabel som denne, hvor I skriver op, hvor de to masser er placeret på linealerne, når der er balance:

5 kg	10 kg
cm	cm
cm	cm
cm	cm
cm	cm

- B. Nu skal I undersøge, hvordan man kan placere 10 kg og 20 kg på vippen? Lav en tabel som denne, hvor I skriver op, hvor de to masser er placeret på linealerne, når der er balance:



10 kg	20 kg
cm	cm
cm	cm
cm	cm
cm	cm

- C. Nu skal I undersøge, hvordan man kan placere 10 kg og 10 kg på vippen? Lav en tabel som denne, hvor I skriver op, hvor de to masser er placeret på linealerne, når der er balance:

10 kg	10 kg
cm	cm
cm	cm
cm	cm
cm	cm

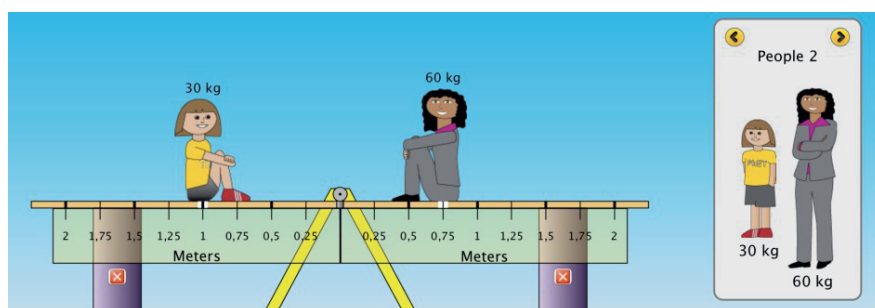
Prøv at sige noget samlet om alle observationerne. Hvilke sammenhænge kan du se?

2. Forudsige balance på en vippe

I denne øvelse skal du prøve at forudsige, hvor man kan placere de forskellige masser på vippen.

Du må ikke bruge vippen til at undersøge om det passer, før du har forsøgt at forklare, hvorfor du tror, at dit gæt er et godt gæt.

- A. Prøv først med kvinden og pigen

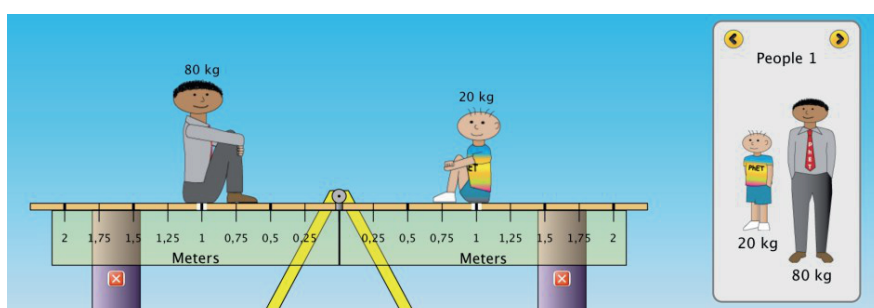


Hvor tror du, man kan placere de to personer, så der er balance?
Er der mere end en mulighed?

Pige	Kvinde
cm	cm
cm	cm
cm	cm
cm	cm

Husk: Du må ikke bruge vippen til at undersøge om det passer, før du har forsøgt at forklare, hvorfor du tror, at dit gæt er et godt gæt. Hvis dine gæt ikke virker, skal du prøve med nye gæt.

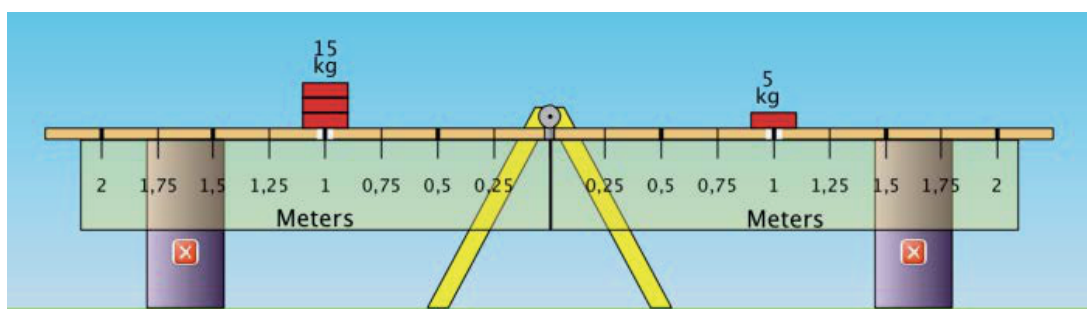
- B. Manden og drengen
Hvor tror du, man kan placere de to personer, så der er balance?
Er der mere end en mulighed?



Mand	Dreng
cm	cm
cm	cm
cm	cm
cm	cm

Husk: Du må ikke bruge vippen til at undersøge om det passer, før du har forsøgt at forklare, hvorfor du tror, at dit gæt er et godt gæt. Hvis dine gæt ikke virker, skal du prøve med nye gæt.

- C. 15 kg og 5 kg



Hvor tror du man kan placere de to vægte, så der er balance?
Er der mere end en mulighed?

15 kg	5 kg
cm	cm
cm	cm
cm	cm
cm	cm

Husk: Du må ikke bruge vippen til at undersøge om det passer, før du har forsøgt at forklare, hvorfor du tror, at dit gæt er et godt gæt. Hvis dine gæt ikke virker, skal du prøve med nye gæt.

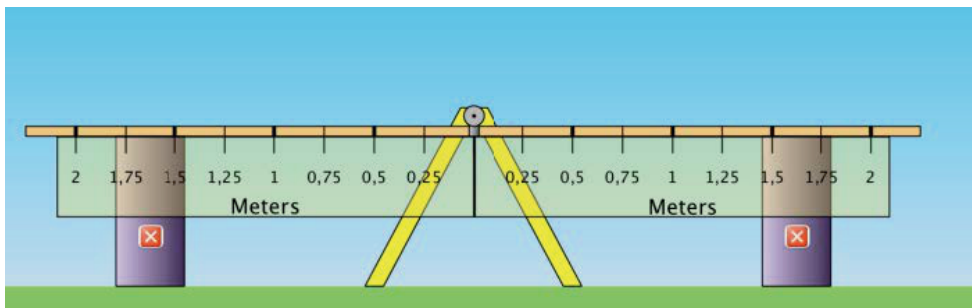
Forklar hvordan du kommer frem til dine gæt på placeringer.

Hvilke overvejelser gør du?

Laver du beregninger?

Kan man lave beregninger, der hjælper med at finde placeringer?

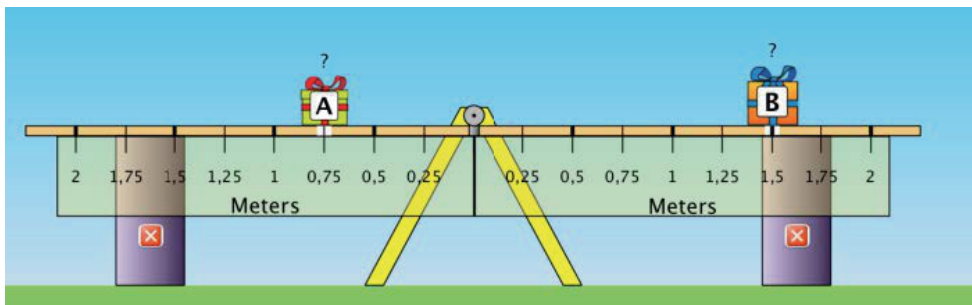
D) Hvor kan man placere to pakker på 15 kg og 20 kg, så der er balance på vippen?



3. Forudsige balance på en vippe II

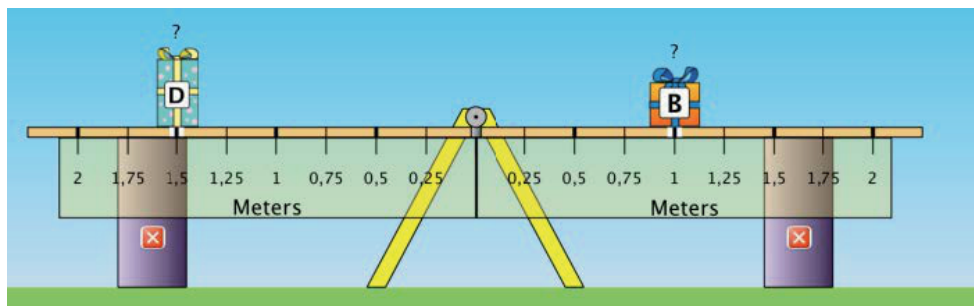
I denne øvelse skal du prøve at forudsige, hvor tunge forskellige pakker kan være, for at der er balance på vippen.

A. Vil der være balance, hvis



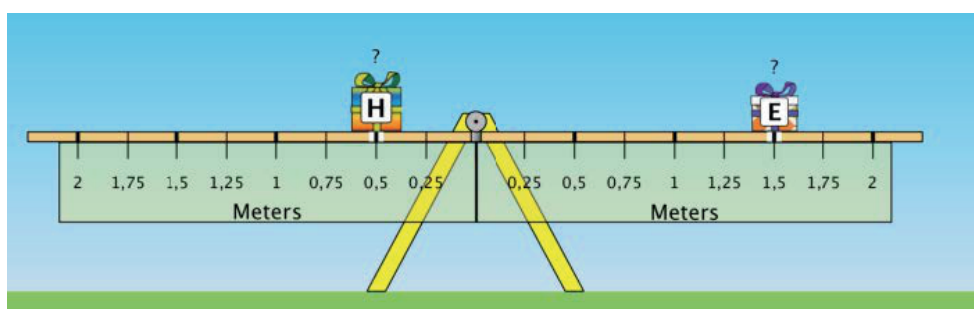
- 1) Pakke A vejer 5 kg, og pakke B vejer 10 kg?
- 2) Pakke A vejer 4 kg, og pakke B vejer 2 kg?
- 3) Kom med mindst 3 forslag til, hvad de to pakker kan veje, så der bliver balance på vippen.

B. Vil der være balance, hvis



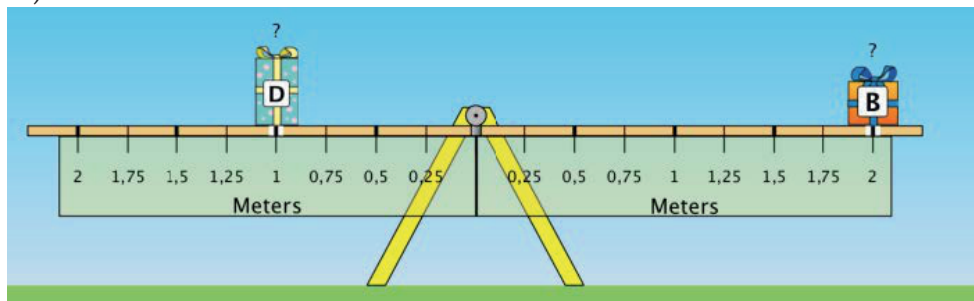
- 1) Pakke B vejer 6 kg, og pakke D vejer 4 kg?
- 2) Pakke B vejer 4 kg, og pakke D vejer 6 kg?
- 3) Pakke B vejer 1 kg, og pakke D vejer 1,5 kg?
- 4) Kom med mindst 3 forslag til, hvad de to pakker kan veje, så der bliver balance på vippen.

C) På billedet er der balance



- 1) Hvis pakke H vejer 3 kg, hvad er så vægten af pakke E?
- 2) Hvis pakke E vejer 4 kg, hvad er så vægten af pakke H?
- 3) Kom med yderligere 2 forslag til, hvad de to pakker kan veje, så der bliver balance på vippen.

D) På billedet er der balance



- 1) Hvis pakke D vejer 3 kg, hvad er så vægten af pakke B?
- 2) Hvis pakke B vejer 4 kg, hvad er så vægten af pakke D?

- 3) Kom med yderligere 2 forslag til, hvad de to pakker kan veje, så der bliver balance på vippen.

Forklar hvordan du kommer frem til dine gæt på masser.

Hvilke overvejelser gør du?

Laver du beregninger?

Kan man lave beregninger, der hjælper med at finde masserne?

4. Formel for balance på en vippe

Du skal starte med at samle alle dine data med masser og afstande, hvor du ved, at der er balancere.

Der er et "system" i tallene.

Prøve at formulere den sammenhæng, du kan se.

Brug sproget til at formulere sammenhængen.

Brug matematikkens sprog og symboler til at formulere sammenhængen.

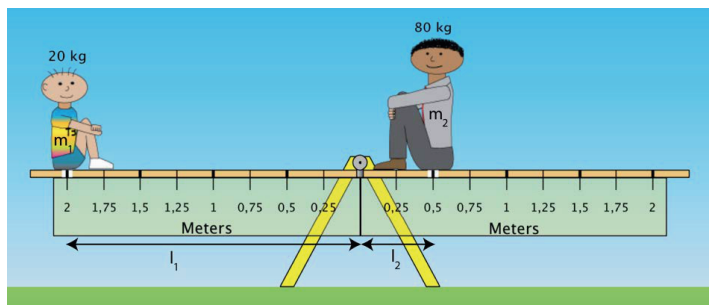
Du skal teste om alle dine data passer med den sammenhæng, du har fundet.

5. Lav en app om balance på en vippe

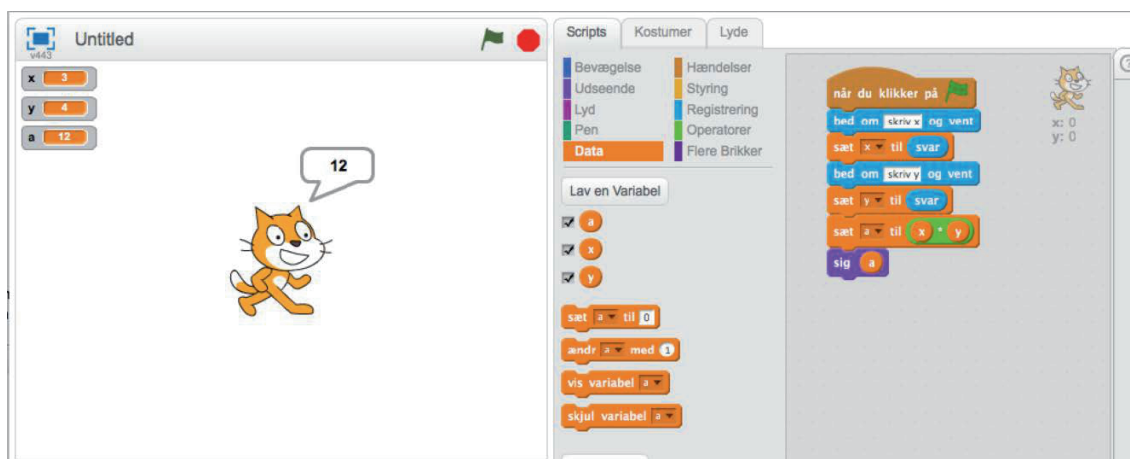
I skal lave et program eller en app i Scratch eller MIT App Inventor, som kan lave beregninger og fortælle jer, hvor I skal placere nogle givne masser, så der er balance.

Vi fandt ud af, at en måde at formulere den matematiske sammenhæng med balance er:

$$m_1 \cdot l_1 = m_2 \cdot l_2$$



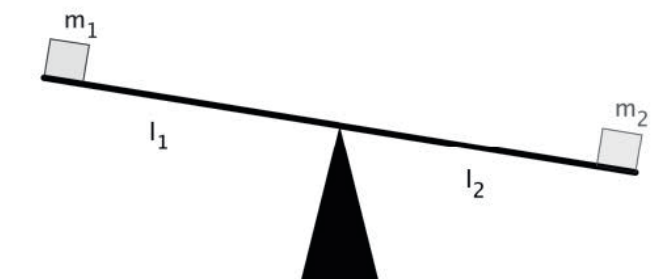
Der er mange måder at få lavet beregninger med Scratch eller MIT App Inventor. Her er et lille eksempel på et Scratch program, der beder om to tal og ganger dem sammen:



Ideer til emner, der kunne komme i spil

Eksempler på fysikemner, der kunne arbejdes med og berøre er formler, symboler, beregninger, programmering af beregninger, løsning af ligninger for forskellige variable osv.

Balance med vægtstang/vippe



$$l_1 \cdot m_1 = l_2 \cdot m_2$$

Her kan eleverne komme til at eksperimentere og lave målinger med forskellige lodder, opstille hypoteser mm. Kan vi sætte sådan en vippe op, som de kan komme til at arbejde med?

Godt problem da l_1 og l_2 ikke er entydige givet ud fra de to massers størrelse.

Lidt anderledes formel/identitet end eleverne er vant til at se.

Programmere en regnemaskine til at beregne en ukendt. Måske kunne eleverne endda vise situationen i en animation i Scratch – en vippe med de to lodder placeret rigtigt.

Ohms lov

Her kan man arbejde med identiteten $U = R \cdot I$ og lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable. Sværere at undersøge eksperimentelt – i hvert fald er det ikke så nemt at se spændingsforskel, strømstyrke og modstand, som det er at se en vippe og lodder.

Radiostyret bil

Hvor hurtigt kan den køre? Opstille eksperiment og lave relevante målinger. Det er nemmere at se end elektricitet. Hvis farten er konstant $s = v \cdot t$. Lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable.

Gåtur

Antal skridt, skridtlængde, skridtfrekvens, fart, tilbagelagt strækning osv. Dertil kan man opstille et forsøg hvor man kan se og fornemme de relevante størrelser. Opstille formelsammenhænge og lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable.

Kinetisk energi

$$E = \frac{1}{2}m \cdot v^2$$

Eksperimentere med hvad ændringer i de forskellige variable betyder for resultaterne. Hvad kvadreringen af v gør for problemet. Lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable. Svær at se og forstå de indgående variable.

Pendul og svingningstid $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Man kan lave et eksperiment, og de indgående variable er til at forstå og visualisere. Eleverne kan nok ikke selv finde frem til formlen. De kan lave en regressionsmodel, men det er ikke så interessant for målet med vores forløb. Eleverne kan undersøge formlens forudsigelser i forhold til deres eksperimentelle data. Lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable. For eksempel på undervisningsforløb i næste afsnit.

Newtons 2. lov

$$F = m \cdot a$$

De indgående variable er svære at se og visualisere. Samme problem som ved Ohms lov og kinetisk energi. Eleverne kan lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable. For eksempel på undervisningsforløb i næste afsnit.

Undersøgelser af masse, rumfang og massefylde

Her er også gode muligheder for at forstå, hvad de indgående variable betyder. Der er også mulighed for at lave en regnemaskine til at finde de forskellige variable. Man kan også lave en regnemaskine, der giver mulighed for at vælge materiale fra en liste og så få beregnet enten rumfang eller masse ud fra oplysninger om det modsatte. For eksempel på undervisningsforløb i næste afsnit.

Yderligere undervisningsforløbsidéer

I dette afsnit findes tre eksempler på undervisningsforløb fra ovenstående liste: Pendul og svingningstid i forløbet 'Penduler og svingningstid'; Newtons 2. lov i forløbet 'Hvor højt hopper en bold?'; Og Undersøgelse af masse, rumfang og massefylde i forløbet 'Vand udvider sig'.

Penduler og svingningstid

Penduler svinger frem og tilbage. Det gør de på en meget rytmisk og ensartet måde, så man har blandt andet brugt dem til at måle tid med.

Man kan også bruge meget lange penduler til at vise, at jorden drejer rundt om sin egen akse. Se for eksempel her:

http://www.pegna.com/Foucault_pendulum_animated.gif

I skal undersøge hvad der har indflydelse på hvor lang tid et pendul er om at svinge frem og tilbage. For en forståelse af svingningstid kan dette links benyttes:

<https://www.geogebra.org/m/eSRVrHPd>

Til det formål skal I bygge en forsøgsopstilling af et pendul med et stativ, tråd og en masse for enden af snoren, som eks. vist på billedet.

I skal overveje hvad der kan have indflydelse på jeres penduls svingningstid.

I skal finde ud af hvordan I vil undersøge hvilken indflydelse de forskellige dele af pendulet har på svingningstiden.



Det er god videnskabelig metode kun at undersøge betydningen af en faktor ad gangen. I skal registrere jeres data i tabeller, så I senere kan finde ud af hvilke data, der hører sammen. Det kan være svært at lave en præcis måling af den tid det tager for pendulet at udføre en enkelt svingning. Hvad kan I gøre for at jeres resultater bliver mere præcise?

Såfremt I ikke allerede har lavet et forsøg hvor I varierer pendulets længde, skal I gøre det nu. Lav målinger af pendulets svingningstid for mindst 7 forskellige længder.

I skal taste jeres tal for længden af pendulet og svingningstider ind i et regneark i GeoGebra og lave et plot af punkterne. Hvad kan I sige om sammenhængen mellem længde og svingningstid?

Hjælp til plotning på PC eller Mac:

<https://www.youtube.com/watch?v=EmW1ziHO6Dc>

Hjælp til plotning på Chromebook eller iPad:

<https://www.youtube.com/watch?v=iCITWV453U4>

Benyt GeoGebras muligheder for at finde en regneforskrift for en funktion, der passer godt med jeres data. I skal benytte regressionsanalyse til at finde modellen for data.

Hjælp til finde model på PC eller Mac:

<https://www.youtube.com/watch?v=k99fzwnF5Gc>

Hjælp til finde model på Chromebook eller iPad:

<https://www.youtube.com/watch?v=--mChPa0Xc0>

Når I har lavet jeres bedste bud på en matematisk model, skal I bruge modellen til at beregne svingningstid for et pendul på 1,5 meter, og I skal undersøge om modellens tal passer med den svingningstid I kan måle for et pendul på 1,5 meter.

I fysikbøger kan man finde denne formel, som beskriver svingningstiden for et pendul:

$$T=2\pi\sqrt{L/g}$$

L er pendulets længde målt i meter og g er tyngdeaccelerationen 9,82 m/s². Undersøg om formlen passer med jeres måleresultater.

Hvor højt hopper en bold?

Hvor højt hopper en bold når man slipper den og lader den falde fra forskellige højder?

I skal lave en forsøgsopstilling hvor I kan måle hvor højt en bold hopper. I skal undersøge hvilken betydning den højde man slipper bolden i har, for hvor højt bolden hopper. I skal registrere jeres data i tabeller, så I senere kan finde ud af hvilke data, der hører sammen.

Gennemfør en række forsøg og vis resultaterne GeoGebra. I skal taste jeres tal for faldhøjde og hoppehøjde ind i et regneark i GeoGebra og lave et plot af punkterne. For hjælp til plotning se 'Penduler og svingningstid'.

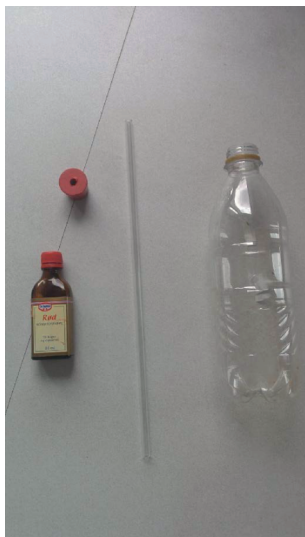
Hvad kan I sige om sammenhængen mellem faldhøjde og hoppehøjde?

Benyt GeoGebras muligheder for at finde en regneforskrift for en funktion, der passer godt med jeres data. I skal benytte regressionsanalyse til at finde modellen for data. For hjælp til at finde model i GeoGebra se 'Penduler og svingningstid'.

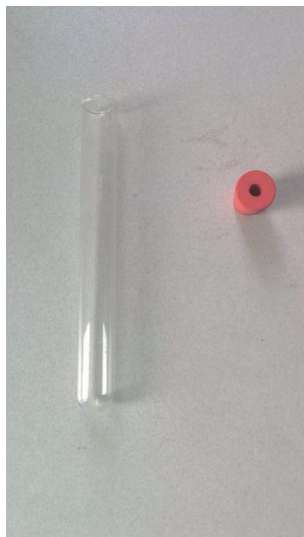
Sammenlign resultaterne af jeres forsøg med det modellen siger. Når I har lavet jeres bedste bud på en matematisk model, skal I bruge modellen til at forudsige hvor højt bolden vil hoppe hvis I slipper den fra en højde på 3 meter? Hvad kan I konkludere?

Vand udvider sig

Til dette forsøg skal I bruge:



Glasrør og frugtfarve



Reagensglas med prop



Bæger og termometer

I skal lave en forsøgsopstilling som vist på billedet til højre, med farvet vand, reagensglas, prop og glasrør (Trefoden har I ikke brug for).

Der er disse krav til jeres forsøgsopstilling Uden at ændre på hvor meget vand, der er fyldt i reagensglasset skal I:

- kunne opvarme og afkøle vandet i reagensglasset
- kunne måle temperaturen af vandet i reagensglasset
- kunne måle hvor højt vandet står i glasrøret
- I skal lave en opstilling, der virker når vandet er koldt og når det er ret varmt.

Når I er sikre på at jeres forsøgsopstilling opfylder de fire krav, skal I lave (og skrive tallene op) mindst 8 målinger af sammenhængen mellem temperaturen af vandet i reagensglasset og hvor højt vandet står i glasrøret.

I skal prøve at forklare hvad I kan se af jeres målinger. Hvad sker der? Hvorfor sker det? I kan evt. prøve at plotte og benytte regressionsanalyse til at finde en model for hvordan vand udvider sig ved hjælp af GeoGebra, som vist i de to foregående forløb.

Dette undervisningsforløb tager udgangspunkt i emnet vækst og differentialligninger i et tværfagligt forløb for Matematik A og Bioteknologi A på HTX. Undervisningen strakte sig over 20 lektioner i faget Matematik A. Undervisningen tager afsæt i konkrete aktiviteter, som skal hjælpe eleverne med at sætte alsidige billeder på begrebet vækst, herunder den logistiske vækst som eleverne møder i Biotek A.

Undervisningsforløbet består af 10 undervisningssange (20 lektioner) med hver sit tema. Den grundlæggende ide i forløbet er at styrke elevernes forståelse af vækst, som de møder den i bioteknologi og i matematik i form af logistisk vækst og differentialligninger generelt.

Eleverne skal opnå en større forståelse for forskellige typer vækst, og de skal introduceres for diskret vækst. Dette sker gennem arbejdet med at opstille og tolke fremskrivningsmodeller og vækstmodeller. Her opfattes vækst som et diskretiseret fænomen, hvor tiden er diskret.

Vækstmodellerne kan og skal delvis ses som en perspektivering og konkretisering af tanker bag differentialligninger. Vækstmodellerne skal støtte og læne sig op ad arbejdet med vækst i bioteknologi, og elevernes arbejde med vækst af colibakterier i Bioteknologi A inddrages i arbejdet med matematik.

Der anvendes elementer fra undervisningsformen "Undersøgelsesbaseret matematik-undervisning"¹, bl.a. brugen af logbog. Eleverne skriver gruppevis logbog fra gang til gang med udgangspunkt i nogle spørgsmål, som læreren har formuleret. Dette er for at fastholde og synliggøre elevernes tanker om det, de arbejder med, så disse systematisk kan anvendes som input til undervisningen, skriver. Læreren har adgang til logbøgerne, dels for at kunne udvælge interessante passager, der kan bruges i undervisningen, og dels for at kunne følge med i den forståelse af emnet, som eleverne får opbygget undervejs.

Undervisningsforløbet er afviklet i efteråret 2014 på Odense Tekniske Gymnasium af Marit Hvalsøe Schou (matematik), samt Dorte Ankerfelt og Marianne Østergaard Nielsen (bioteknologi). Fra LSUL medvirkede John Schou i planlægning og gennemførelse af undervisningen.

¹ Eksempelvis kan man læse om Undersøgelsesbaseret matematikundervisning i "Forskningsbaseret viden om undersøgendematematikundervisning":

<https://www.emu.dk/sites/default/files/Vidensnotat%20matematik.PDF>

Mål for eleverne

Eleverne kan:

- opstille rekursive beskrivelser af vækst
- generalisere deres undersøgelser af vækst og opstille modeller for væksten
- modellere vækstsituationer med computer
- kende forskel på lineær, eksponentiel og logistisk vækst i både matematik og bioteknologi
- aktivt modellere fremskrivningsmodeller

Der er særlig fokus på følgende fire kompetencer:

Modelleringskompetencen

Eleverne skal kunne analysere problemstillinger om vækst og opstille og løse tilhørende matematiske modeller. De skal kunne tolke løsningen og bl.a. gøre rede for modellens eventuelle begrænsninger og validitet.

Repræsentationskompetencen

Eleverne skal kunne veksle mellem forskellige repræsentationer herunder grafiske, symbolske og sproglige repræsentationer.

Hjælpemiddelkompetencen

Eleverne skal kunne anvende matematiske hjælpemidler, herunder matematikprogrammet GeoGebra og konkrete materialer som fx tændstikker, m&m-chokolader og bønner til visualiseringer og undersøgelser.

Kommunikationskompetencen

Eleverne skal kunne formulere sig i og skifte mellem det matematiske symbolsprog og det daglige skrevne eller talte sprog.

Arbejdsformer

Eleven skal arbejde meget undersøgende med matematikken, og der bruges konkrete aktiviteter som fx spil. Det er en nødvendighed, at der arbejdes seriøst med de forskellige aktiviteter. De er tilrettelagt så eleven kommer til at opbygge deres viden gennem det undersøgende arbejde med aktiviteterne. Der kommer altså ikke en lærer og fortæller, hvordan det hele hænger sammen. Der laves opsamlinger undervejs og det er vigtigt at eleverne diskuterer det de finder ud af.

Undervejs skal eleverne i grupper lave en digital logbog i Google Docs som en del af forberedelsen. I logbogen skal eleverne skrive om deres overvejelser og opdagelser ud fra nogle spørgsmål der bliver udleveret på forhånd. Logbogen skal deles med læren, der derved kan følge med i arbejdet og kan benytte elevernes ideer og tanker i undervisningen.

Produkt

I dette forløb skal eleven skrive en naturvidenskabelig artikel med udgangspunkt i IMRAD-formatet. IMRAD står for Introduction, Methods, Results And Discussion.

De forskellige afsnit indeholde følgende:

Introduction

Appetitvækker til læseren.

Kort og præcis formulering af projektets formål: Opstilling og anvendelse af matematiske modeller til beskrivelse af vækst bl.a. bakterievækst i bioteknologi.

Methods

Metoderne fra laboratoriet præsenteres – overordnede principper er vigtigst.

Metoderne i matematik præsenteres – bl.a. brug af rekursive følger til skridtvis fremskrivning og opstilling af diskrete matematiske modeller. Opskrivning af differentialligningsmodel og beskrivelse af løsningskurver.

Results

Redegørelse for den konkrete matematiske model og dens rækkevidde.

Præsentation af resultater i overskuelige tabeller og grafer.

Discussion

Analyse og vurdering af resultaterne.

Matematisk modellering (modelleringscyklus) som metode.

Afslut med en kort og præcis konklusion på projektet.

Eleverne kan enten arbejde sammen om artiklen i selvvalgte grupper på max. 3 personer, eller arbejde alene. For gruppeafleveringer skal det fremgå, hvem der har skrevet hvilke afsnit, og kravet til dybde og omfang er større.

Artiklerne kan eventuelt sættes op i spalter, men det er ikke et krav. Omfanget forventes at være 5-8 sider.

Rapporten indgik i det oprindelige forløb ved den mundtlige prøve i såvel matematik som i biotek.

Undervisningsgange

1. gang: Opbygge forståelse for rekursioner og den relevante terminologi

Gennem undersøgelser opbygger eleverne forståelse for beskrivelse af udviklinger vha. rekursionsformler. Eleverne tilegner sig terminologien, som er relevant, når man beskriver udviklinger rekursivt. Det er en vigtig pointe, at det ikke drejer sig om at finde en funktionsforskrift, der kan beskrive hele udviklingen, men at det er den trinvis vækst, der fokuseres på.

Eleverne skal arbejde med arbejdskortene som kan downloades sidst i afsnittet. Alle alle elever starter med "Tændstikker 1". Differentieret brug af de øvrige fire arbejdskort ud fra den sværhedsgrad læreren mener de forskellige grupper kan håndtere.

Fælles opsamling når alle er igennem "Tændstikker 1". Opsamlingen skal omhandle:

- Diskussion af vækst vs. tilvækst
 - Elevernes udsagn om hvordan de opfatter væksten i mønstret
 - Fokus på tilvækst
 - Fokus på at opskrive rekursiv sammenhæng.
- Notationen $F(t+1) = F(t) + \dots$ introduceres og fortolkes i forhold til elevernes udsagn. I det videre arbejde lægger læreren vægt på, at eleverne arbejder med den rekursive måde at skrive mønstrenes vækst på.

Der lægges meget lidt vægt på at bestemme funktionsudtryk for udviklingerne - det er væksten, rekursivt beskrevet, der skal fokuseres på.

Som hjemmearbejde laver eleverne gruppevis en logbog (i fx Google Doc, som læreren har adgang til at læse som led i forberedelsen til næste undervisningsgang) over spørgsmålene:

- * *Forklar hvad I forstår ved vækst i forbindelse med de mønstre I har arbejdet med.*
- * *Vælg en af de serier med mønstre I arbejde med, og gør rede for hvordan mønstrene voksede. Benyt både tegninger og symboler til at beskrive væksten.*
- * *Forklar hvordan man helt generelt kan opskrive formler for vækst, der fremkommer på denne måde.*

Links til arbejdskort

Tændstikker 1:	https://tinyurl.com/ycl6s62x
Tændstikker 2:	https://tinyurl.com/yahfowkl
Kvadrater:	https://tinyurl.com/y96plcr7
LEGO:	https://tinyurl.com/ya4963xb
Prikker:	https://tinyurl.com/yc2ohpj8

2. gang: I dybden med notationen for rekursion

Undervisningen starter med en grundig opsamling på elevernes udsagn fra logbøgerne. Læreren præsenterer eksempler på det, eleverne har skrevet om logbogs-spørgsmålene.

Diskussion med eleverne om måderne at formulere svarene på, hvordan de er ens; hvordan de er forskellige etc.

Det vil være en fordel hvis man kan klippe udsagn sammen, og få eleverne til at forholde sig til:

- graden af præcision
 - hvorvidt udtrykkene fortæller det samme
 - forskellige måder at skrive rekursioner på
- $$F(n+1) = F(n) + \dots, F(n) = F(n-1) + \dots$$

Herefter skal eleverne arbejde med deres forståelse af rekursive opskrivninger gennem fem arbejdskort, som kan hentes sidst i afsnittet.

Alle bør arbejde med "Talfølge 1" og "Talfølge 2". De tre andre aktiviteter er lavet for også at kunne udfordre de elever, der "kan det hele i forvejen", og falder lidt uden for det helt centrale fokus med at kunne beskrive vækst rekursivt. Disse aktiviteter kan også bruges løbende gennem resten af undervisningsforløbet til elever, der mangler udfordringer.

På hjemmesiden "Practice with recursive sequences" (<http://www.regentsprep.org/regents/math/algtrig/atp3/REcursivepractice.htm>) kan man også finde relevante problemer, som eleverne kan arbejde med.

Når alle har arbejdet med det første arbejdskort, laves en opsamling, hvor elevernes tanker om det, de har arbejdet med, synliggøres. Betydningen af de forskellige elementer i rekursionen $F(0) = 2$; $F(t + 1) = F(t) + 3$ og de andre rekursioner i arbejdsarket skal behandles grundigt. Især kan man med fordel forberede tankegangen om linjeelementer og differentiaalligninger, ved at se på rekursionen $F(t + 1) = F(t) + 3$ som en angivelse af væksten overalt; "uendelig mange linjer med hældning 3", og at $F(0) = 2$ fastlægger hvilken af de uendelig mange muligheder, der er tale om.

Eleverne skriver logbog over spørgsmålene:

- * *Gør rede for jeres vigtigste opdagelser på arbejdskortene "Rekursivt definerede talfølger 1" og "Rekursivt definerede talfølger 2".*
- * *Beskriv med jeres egne ord hvilke typer af vækst, der er tale om – og hvorfor.*
- * *Forklar hvordan dette hænger sammen med matematik, I kender fra tidligere.*

Links til arbejdskort

Talfølge 1:	https://tinyurl.com/yarr84r4
Talfølge 2:	https://tinyurl.com/y9k25s29
Fibonacci:	https://tinyurl.com/yagqvzkz
Kvadratrødder:	https://tinyurl.com/y9cr99x9
Vampyrer:	https://tinyurl.com/yap7owct

3. gang: Modellering ved hjælp af rekursive beskrivelser

Undervisningen starter atter med opsamling på elevernes logbøger ud fra udvalgte eksempler. Ved opsamlingen er der fokus på:

- elevernes beskrivelser ved hjælp af rekursion
- at se væksten i beskrivelserne $F(n+1) = F(n) + \dots$
- vigtigheden af at kende en begyndelsesværdi
- at eleverne kan tilskrive de rekursive udtryk mening.

Herefter arbejder eleverne med to konkrete problemer, der giver anledning til eksponentiel vækst. De to arbejdskort kan hentes sidst i afsnittet. kan hentes sidst i afsnittet.. Der er behov for, at man har anskaffet hvide og brune bønner og nok af de flade M&M til, at eleverne kan udføre undersøgelserne. Når spillene er slut, holdes en klassesamtale med fokus på:

- Teoretisk forståelse af "den ideale" udvikling af data i spillene. For M&M er tilvæksten $1/2 \cdot \text{antallet}$. For bønnerne er der en vækst på ca. $6 \cdot \text{antallet}$
- Fortolkninger af hvad det er i "spillene", som giver anledning til at væksten bliver tilnærmelsesvis eksponentiel.

Eleverne kan formentlig opstille en rekursiv model, der teoretisk beskriver data. M&M: $M(t+1) = M(t) + 0,5 \cdot M(t)$.

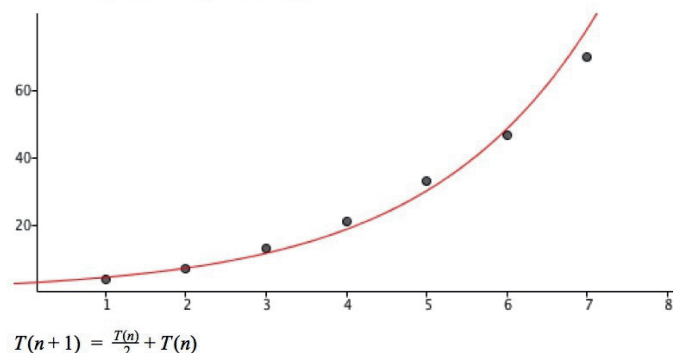
Med bønnerne er det vanskeligere!

Spørgsmål til logbog:

* *Beskriv med jeres egne ord hvilken type af vækst, der fremkommer ved de to eksperimenter, og hvad der er det særlige ved denne form for vækst.*

* *Gør rede for hvorfor eksperimenterne giver anledning til denne type vækst. Hvad er det ved udførelsen af eksperimenterne, der har betydning?*

Resultater fra M&M's forsøg



Links til arbejdskort

M&M laboratoriet: <https://tinyurl.com/ybw9jlwf>

Smitte: <https://tinyurl.com/y9mbc4f2>

4. gang: Mere modellering med rekursioner - logistisk vækst

Lektionen starter med opsamling og diskussion af udsagn fra elevernes logbøger. Der er fokus på:

- forskellen på fremskrivningsfaktor og vækstfaktor for eksponentiel vækst
- præcisionen i det der er skrevet, og på hvordan den teoretiske forståelse af spillene kan udtrykkes som rekursioner. Atter skal betydningen af en startværdi pointeres
- den teoretiske forståelse af de to spil, og hvorfor de bør give anledning til eksponentiel vækst. Der er 50% sandsynlighed for at m vender opad på M&M's, og ca. 6 bønner kan støde op til en hvid bønne og dermed blive smittet.

I undervisningen skal eleverne spille et spil: Vækstspil

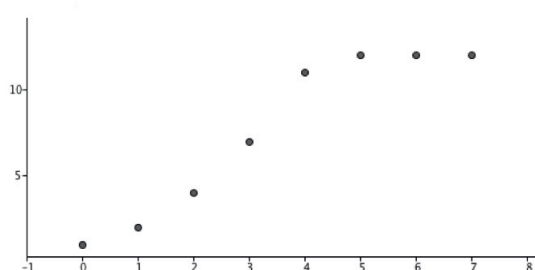
Spillet handler om logistisk vækst, og det er hensigten, at eleverne gennem spillet skal få en intuitiv forståelse af hvorfor og hvordan logistisk vækst udvikler sig, som den gør. Eleverne har set data fra logistisk vækst før, men forståelse bliver en anden, når denne vækstform kan følges trinvis. Spilleplade, regler og brikker kan hentes via links sidst i afsnittet.

Efter spillet skal der i en klassesamtale, fokuseres på elevernes observationer og fortolkninger og ideer til beskrivelse af en sådan udvikling.

Spørgsmål til logbogen:

- * *Beskriv jeres observationer fra Vækstspillet*
- * *Forklar hvorfor antallet af brikker udvikler sig som I har observeret.*

Resultater fra vækstspil

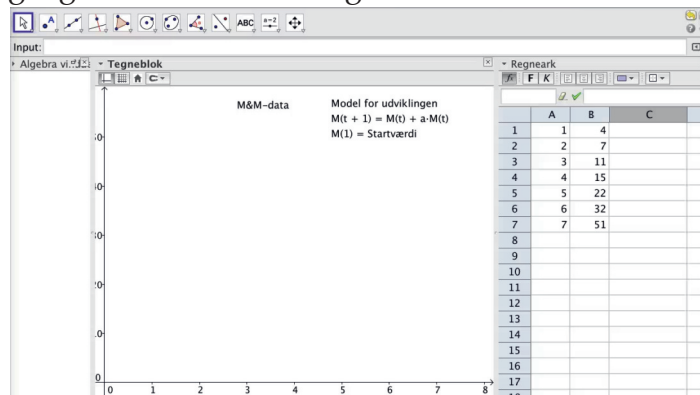


Links til arbejdskort

Spilleplade:	https://tinyurl.com/yatzl78e
Regler:	https://tinyurl.com/ycc5l5aa
Brikker:	https://tinyurl.com/y9lavoln

5. gang: Modellen for logistisk vækst

Som forberedelse derhjemme har eleverne fået til opgave se en video om modelsimulering og brug af skydere i GeoGebra, og de skal selv lave noget tilsvarende i en geogebrafil med deres egne data fra M&M laboratoriet:



Link til video: <https://tinyurl.com/y9s7ehwx>

Opsamling på log fra sidste undervisning skal have fokus på:

- Hvorfor er det ikke længere bare en eksponentiel vækst
- Hvordan kan man i en rekursiv beskrivelse (en fremskrivningsmodel) kan tage højde for den faldende vækst.

Som opsamling præsenteres ideerne i det næste arbejdsark (Vækstspillet - en anderledes vækst), og eleverne får ca. 25 minutter til at arbejde med dette. Arbejdsarket kan hentes sidst i afsnittet.

I en klassesamtale skal elevernes forskellige ideer præsenteres og ansues som som fremskrivningsmodeller, for at se om de beskriver den type udvikling, som blev observeret i vækstspillet. Denne fase skal der bruges god tid på, så eleverne virkelig når at få en forståelse for, hvordan man matematisk kan styre, at væksten bliver aftagende.

Herefter præsenteres standardmodellen for logistisk vækst (som fremskrivning):

$$N(t+1) = a \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t) + N(t)$$

Den diskuteres og fortolkes, så eleverne erfarer hvorfor den også beskriver nedsat vækst. Standardmodellen sammenlignes med elevernes ideer.

Efterfølgende skal eleverne arbejde med deres data fra biotek (logistisk, e-coli bakterievækst) og data fra M&M spillet (eksponentiel).

Eleverne laver fremskrivningsmodeller i GeoGebras regneark af logistisk vækst og tegner dem side om side med data fra e-coli-forsøget. Ved hjælp af skyderne finder de den bedst mulige model.

Se et eksempel her: <https://www.geogebra.org/m/kowyoNEI>

Links til arbejdskort

Vækstspillet - en anderledes vækst: <https://tinyurl.com/y83rd897>

Spørgsmål til logbog:

* Gør rede for hvordan man modificerer en eksponentiel vækst, så den kan beskrive logistisk vækst som jeres biotekforsøg er et eksempel på.

6. gang: Differentialligninger - hvad er det?

Der startes med en opsamling af indholdet i elevernes logbøger. Atter er der fokus på vækst, og på hvordan man "modificerer" eksponentiel vækst til logistisk vækst med udgangspunkt i elevernes formuleringer fra logbøgerne. Endvidere lægges vægt på standardmodellen for logistisk vækst som fremskrivningsmodel:

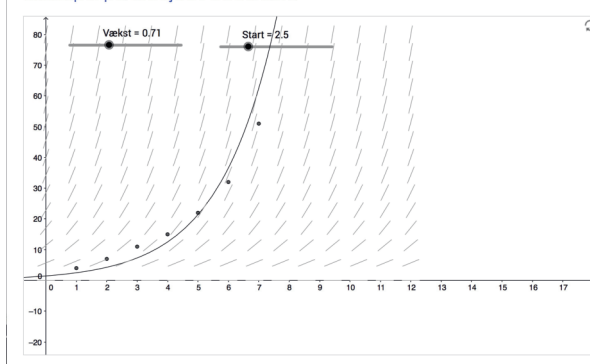
$$N(t+1) = a \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t) + N(t)$$

og på, at væksten kan udtrykkes ved

$$N(t+1) - N(t) = a \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t)$$

Efter opsamlingen kommer det store mentale spring over til differentialligninger: Læreren præsenterer eleverne for de kendte GeoGebrafiler med skydere, data og fremskrivningsmodel for M&M hhv E-coli væksten. Sammen med modellerne er der indtegnet linjeelementer:

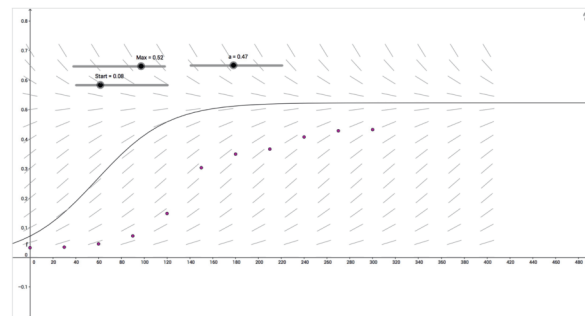
Eksempel på arbejde i GeoGebra



Eksponentiel

Video-eksempel på eksponentiel: <https://www.geogebra.org/m/MHAzWTlw>

Eksempel på arbejde i GeoGebra



Logistisk

Video-eksempel på logistisk: <https://www.geogebra.org/m/mAyYIwrh>

Lige inden læreren ændrer værdierne af skyderne får eleverne følgende besked:

- Vær klar til at skrive jeres tanker ned, om det I får at se... Men LAD VÆRE MED AT KOMMENTERE DET.
- Først skal I diskutere gruppevis og så samler vi op fælles.
- Hvad ser man på figurerne?
- Hvordan ændrer de sig, når man rykker på skyderne
- Hvordan ændrer de små linjestykker sig?
- Hvilken betydning har de små linjestykker?

Efter elevernes gruppesamtaler startes en klassediskussion om, hvad det er linjestykkerne viser. Her kommer man formodentlig ind på følgende:

- Vækst - tangenter eller gennemsnitlig vækst
- Ændring kun afhængig af værdier på 2.-aksen?
- Betydning af startværdi.

På baggrund af denne diskussion får eleverne nogle opgaver med indtegnede linjeelementer, som de skal prøve at tegne kurver i for at kvalificere fornemmelsen af "linjeelement = tangent" yderligere.

Når eleverne har tegnet et par kurver, gennemføres en klassesamtale, hvor der strammes op på forståelsen af, at linjeelementerne viser tangenthældninger. Dette leder frem til, at vi kan tale om, at en kurve er givet ud fra den vækst som linjeelementerne antyder - at linjeelementerne definerer tangenthældninger til en kurve.

Læreren skal sørge for, at der tydeligt bliver en kobling tilbage til elevernes forforståelser om, at tangenthældninger også er noget med den afledede.

Der skal også kobles til biotek-bogens fremstilling af logistisk vækst med ligningen

$$\frac{dN}{dt} = a \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t)$$

og at den også kan skrives som

$$N'(t) = a \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t)$$

Intuitivt defineres en differentiaalligning, som noget, der angiver vækst (visualiseret ved linjeelementer) i alle relevante punkter i koordinatsystemet.

Dette eksemplificeres af læreren ved den første helt konkrete differentiaalligning (for eksempel $y' = 2y$) og hvordan man nemt kan bestemme hældningen af et linjeelement.

$y' = 2y$ sættes i relation til den måde man tidligere har set vækst på - og identificeres som noget, der formentlig må være en eksponentiel vækst.

Eleverne arbejder videre med opgaverne.

Link til opgaver: <https://tinyurl.com/ycu2qp48>

Logspørgsmål til næste gang:

* *Beskriv ligheder mellem de måder vi har anskuet vækst på, altså rekursive følger og differentiaalligninger.*

* *Gør rede for hvad linjeelementer beskriver, og hvordan man bruger dem til at indtegne løsningskurver for en differentiaalligning.*

7. gang: Linjeelementer og tangenter ifm. differentiaalligninger

I opsamlingen på elevernes logbøger er der særlig med fokus på:

- forskelle og ligheder mellem den rekursive måde at anskue vækst på og den nye måde med differentiaalligninger
- forståelsen af, at den afledede af en (ukendt) funktion kan fortælle om væksten i alle punkter.
- hvordan man kan følge linjeelementer for at se udviklingen i en vækst
- opsamling på et par opgaver fra sidst.

Herefter præsenterer læreren ideer til, hvordan eleverne selv kan beregne hældningen af linjeelementer

ud fra en given differentiaalligning, og introducerer opskrivning af tripler for linjeelementer (x_0, y_0, α) . Eleverne sættes herefter til at arbejde med nogle opgaver, som kan man hentes sidst i afsnittet.

Dagens sidste område er tangenter: Hvordan den viden, man har ud fra linjeelementerne, kan benyttes til at tegne tangenter til løsningskurver. Fokus for lærerens samtale med eleverne skal, ud over det regnetekniske, være, at man kan benytte ligningerne for tangenterne som en approximation for de

ukendte løsningskurver, såfremt man ikke afviger ret langt fra det punkt, der bestemmer tangenten.

Eleverne arbejder videre med opgaverne ovenfor, og skal yderligere bestemme ligninger for tangenter gennem nogle af punkterne (se sidst i afsnittet for opgaver).

Spørgsmål til logbogen:

* Hvordan bestemmer (beregner) man først linjeelementerne og dernæst udseendet af en løsningskurve for en bestemt differentiallyigning?

* Forklar hvad tangenterne til en løsningskurve kan bruges til.

Links til opgaver

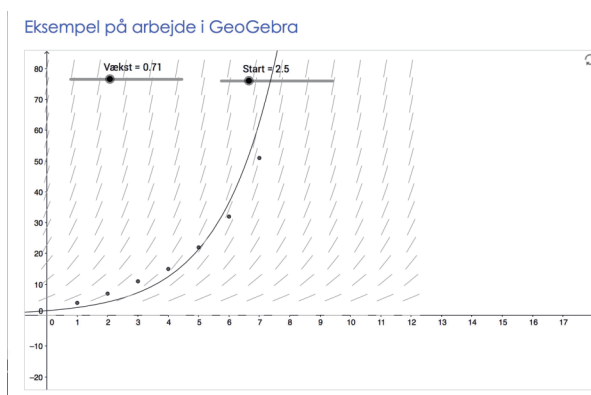
Opgaveark 1: <https://tinyurl.com/ydgoggrr>

Opgaveark 2: <https://tinyurl.com/ycuk69o6>

Opgaver tangenter: <https://tinyurl.com/yau2otdv>

8. gang: Sproglige repræsentationer af differentiallyigninger

Som forberedelse til undervisningen har eleverne set en video om hvordan man kan få GeoGebra til at tegne linjeelementer og løsningskurver for differentiallyigninger.



Link til video: <https://tinyurl.com/y7yaptel>

Opsamling på elevernes logbøger. Specielt med fokus på:

- det tekniske i hvordan man beregner linjeelementer og finder ligninger for tangenter
- at man kan benytte ligningerne for tangenterne som en approximation for de ukendte løsningskurver, såfremt man ikke afviger ret langt fra det punkt, der bestemmer tangenten.

Derefter skal eleverne involveres i en klassesamtale om sproglige formuleringer af differentiallyigninger. Med udgangspunkt en brainstorm om ord, der signalerer vækst, diskuteres det, hvorfor visse udsagn om vækst kan tolkes som om de beskriver en differentiallyigning.

Fire konkrete eksempler diskuteres. Hvad skal vi kalde de variable? hvorfor er det vækst? hvordan kan man formulere problemet som en ligning - differentiaalligning?

- 1) Væksten i antallet bakterier er (ligefrem) proportional med antallet af bakterier.
- 2) Udviklingen i temperaturen af en kop kaffe er (ligefrem) proportional med forskellen mellem rumtemperaturen og kaffens temperatur.
- 3) Væksten er omvendt proportional med kvadratroden af antallet.
- 4) Væksten af bakterier i en petriskål kan beskrives ved logistisk vækst. Maksimalværdien er 0.42 og vækstfaktoren er 0,3.

Samtidig med diskussionen om opstillingen af ligningerne, skal der fokuseres meget på begreberne ligefrem proportionalitet, proportionalitet og omvendt proportionalitet. Opmærksomheden holdes også rettet mod logistisk vækst skrevet som

$$N'(t) = a \frac{K - N(t)}{K} \cdot N(t)$$

Eleverne arbejder derefter med en række gamle eksamensopgaver fra STX, som handler om sproglige formuleringer af differentiaalligninger - vi har desværre ikke rettigheder til at gengive de valgte opgaver på denne hjemmeside.

Spørgsmål til logbogen:

** Eleverne skal skrive deres løsninger på et par udvalgte opgaver i logbogen.*

9. og 10. gang: Færdigheder i løsning af differentiaalligninger

Opsamling på hjemmearbejdet med opgaver.

Klassesamtale om, hvad det vil sige at en funktion er "løsning" til en differentiaalligning, både intuitivt ud fra linjelementerne, og ud fra at "man sætter ind på begge sider af lighedstegnet i ligningen, og tjekker resultatet".

Herefter fortsatte undervisningsforløbet med en mere traditionel tilgang til differentiaalligninger, med træning i at løse de relevante opgavetyper, som er beskrevet i fagets kernestof.

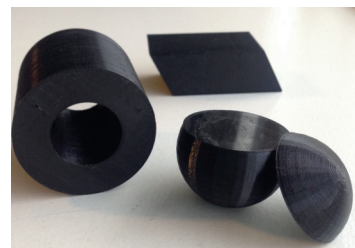
Dette undervisningsforløb tager udgangspunkt i emnet rumlige figurer i faget Matematik A-niveau på HTX. Undervisningen tager afsæt i konkrete 3D-modeller, som skal hjælpe eleverne med at skabe mening i de mange matematiske symboler, der indgår i formlerne overfladeareal og rumfang af rumlige figurer. Eleverne skal arbejde med prisme, cylinder, cylinderrør, kegle, keglestub, pyramide, pyramidestub og kugle.

Undervisningsforløbet består af 10 undervisningssange (20 lektioner) med hver sit tema. Den grundlæggende idé i forløbet er at styrke elevernes symbol- og formalismekompetence ved at sammenkæde konkrete repræsentationer af forskellige rumlige figurer med de symbolske udtryk, der anvendes ved problemløsning. Herudover ledes eleverne gennem forskellige ræsonnementer, der fører frem til nogle af de symbolske udtryk.

Mange elever har problemer med at forstå og anvende formelsamlingens mange symbolske udtryk, skønt de fleste er illustreret med figurer, hvor de indgående symboler er vist og beskrevet med tekst.

I dette forløb er der fokus på de mange forskellige roller symboler spiller i matematikken. Det faglige emne er rumlige figurer, som ud over de sædvanlige repræsentationsformer, man arbejder med i gymnasimatematikken, også har en håndgribelig repræsentation. Man kan holde om en cylinder, trille en kugle, vende og dreje en pyramide osv.

Gennem arbejdet med konkrete repræsentationer i form af 3D-printede figurer¹ skal eleverne opnå kendskab til forskellige rumlige figurer og hvilke variable, der er nødvendige for at beskrive dem. For at kunne finde bestemte stykker (vinkler, sider etc.) samt overfladeareal og rumfang af rumlige figurer arbejder eleverne med geometriske og algebraiske ræsonnementer, hvor der hele tiden er en tæt kobling mellem de benyttede matematiske symboler og deres konkrete repræsentationer (stl-filer til de 3D-printede figurer kan hentes sidst i afsnittet).



Der anvendes elementer fra undervisningsformen "Undersøgelsesbaseret matematikundervisning", med en relativ høj grad af lærestyring, idet eleverne undersøger allerede formulerede spørgsmål og hypoteser.

Ud fra arbejdsark arbejder eleverne i grupper med at opstille udtryk for overfladeareal og rumfang af rumlige figurer, hvor de indledningsvis bruger en del tid på at diskutere de nødvendige variable og sammenkæde disses beliggenhed på en konkret figur med det symbol, der anvendes i formeludtrykkene. For at fastholde symbolernes betydning skal eleverne ved hver figur tegne skitser af de rumlige figurer og angive relevante symboler. Undervejs i forløbet øges kravene til elevernes evne til selv at opstille sådanne udtryk. Det kan være en udfordring at afvikle et så forholdsvis langt forløb,

¹ Kan evt. købes Lyreco eller Lekola

hvor arbejdsformen afviger fra det, eleverne er vandt til. Mange elever har svært ved at holde fokus og vil finde det "kedeligt" at skulle arbejde på den samme måde gennem en længere periode. Det er blandt andet et udtryk for, at de er usikre, og at det kræver mere af dem selv at være aktive end at få resultaterne fortalt af en lærer. For at tage højde for dette, er arbejdsarkene udfærdiget lidt forskelligt, men man kan også som lærer selv være med at skabe variation. Forløbet kan eventuelt forkortes ved at udelade nogle af de rumlige figurer eller man kan erstatte nogle af arbejdsarkene med traditionel undervisning eller andre typer aktiviteter.

Hver undervisningsgang blev afsluttet med at grupperne reflekterede over deres udbytte af timen: hvilke elementer bidrog med hvad i deres læring? Hver gruppe havde sin egen bog, hvor deres besvarelser blev skrevet ind i sammen med de afsluttende refleksioner. Bøgerne blev indsamlet efter hver time, så læreren havde mulighed for at se deres udvikling og rette eventuelle misforståelser.

Undervisningsforløbet er afviklet i efteråret 2016 på Odense Tekniske Gymnasium af Lena Erbs. Fra LSUL medvirkede Marit Hvalsøe Schoui planlægning og gennemførelse af undervisningen og John Schou deltog i udarbejdelse af materialer.

Links til stl-filer

3D-filer

<https://tinyurl.com/y94oahwb>

Mål for eleverne

Eleverne

- får kendskab til de rumlige figurer: prisme, cylinder, cylinderrør, kegle, keglestub, pyramide, pyramidestub og kugle
- kan afgøre hvilke variable, der skal bruges for at beskrive hver figur, og kan finde dem på både en model og en tegning af figuren
- bliver fortrolige med de formler, herunder de matematiske symboler, der benyttes til beregning af rumfang og overfladeareal af de nævnte rumlige figurer og kan benytte disse til konkrete beregninger
- kan udlede udvalgte formler og gennem omskrivninger og sammenholdelse af formlerne opnå yderligere viden om rumlige figurers rumfang og overfladearealer

Der er særlig fokus på følgende fire kompetencer:

Tankegangskompetencen

Eleverne skal kunne afgøre hvilke spørgsmål der kan stilles og løses med matematik om de nævnte rumlige figurer, og hvilke oplysninger man har brug for for at svare på dem.

Ræsonnementskompetencen

Eleverne skal kunne finde og benytte matematiske ræsonnementer, der fører frem til udvalgte formler for overflade

Repræsentationskompetencen

Eleverne skal kunne veksle mellem forskellige repræsentationer herunder konkrete, symbolske, grafiske og sproglige repræsentationer.

Symbol- og formalismekompetencen

Eleverne skal kunne læse symbolske udtryk og kende de enkelte symbolers betydning i en konkrete situation. De skal kunne benytte symbolske udtryk og kende de regler, der gælder for omskrivninger af sådanne udtryk.

Arbejdsformer

Eleverne skal arbejde i grupper på fire. Hver time starter med en lille intro, hvor der kort tales om, hvad eleverne fandt ud af i sidste time, og hvad der skal arbejdes med i dag. Derefter arbejder eleverne i grupperne med udleverede arbejdsark. Undervejs får de udleveret ekstra kort af underviseren med træningsopgaver og spørgsmål, der kan hjælpe jer med opgaverne på arbejdsarkene eller som uddyber nogle af opgaverne.

Hver gruppe får udleveret en notesbog, hvor de i løbet af hver time skal lave en "matematikjournal" over dagens arbejde. Bogen udleveres ved starten af hvert modul og afleveres i slutningen. Herefter bliver elevernes journal scannet ind, og underviseren lægger den til jer i portfolien, så de har den elektronisk.

Produkt

Matematikjournal, hvor det er meget vigtigt at eleverne gør sig umage med at notere alle deres tanker, beregninger og tegninger.

De skal lave en journal for hvert arbejdsark. Der kan være behov for at lave mere end én journal i samme lektion!

Journalen skal indeholde følgende:

- Dato
- Titel på arbejdsark
- Deltagende gruppemedlemmer
- Besvarelse af spørgsmålene på arbejdsarket samt på de spørgsmål I får undervejs.
- Afsluttende refleksioner

De sidste 5-10 minutter af hver lektion bruges til afsluttende refleksioner. Her skal læren bede eleverne tænke over (og skrive ned) hvad de har fået ud af dagens arbejde ud fra spørgsmål, såsom: hvad har I lært? hvad var måske særlig svært? hvordan fandt I ud af det? var det tegningerne, at tegne selv, at have en 3D-model, at diskutere i gruppen, at tale med en lærer? Er der noget, som var særlig godt, eller måske irriterende, og som vi skal lave om på?

Undervisningsgange

1. og 2. gang: Rumfang af prizmer og cylindre

Indledningsvist introduceres arbejdsformen med arbejdsark, opsamling og refleksioner over egen læring.

Det er vigtigt at pointere, at et meget væsentligt mål med forløbet er forståelsen for hvilken betydning de mange symboler i formlerne for overfladearealer og rumfang har.

Eleverne deles ind i grupper på 4 elever. I dette forløb kan det anbefales at inddele efter niveau, da man så kan støtte hhv. udfordre grupperne med ekstra arbejdsark undervejs, som behovet opstår. Nogle grupper når meget langt, mens andre grupper bruger mere tid til de grundlæggende spørgsmål. Afhængigt af hvilke mindstemål man har opstillet for klassen, kan nogle af spørgsmålene fra arbejdskortene eventuelt tages ud og gives ekstra til de grupper, der arbejder hurtigt og har nemt ved det. Nederst på siden findes et dokument med eksempler på ekstraspørgsmål. Hjælp-spørgsmålene giver ekstra træning og hjælper eleverne på vej, mens Udfordring-spørgsmålene uddyber emnet og er mere krævende for de elever, der kan klare lidt mere.

I de første lektioner arbejdes der med primært med symboler som etiketter til at navngive og repræsentere forskellige længder/sider/arealer på rumlige figurer, og hvordan disse kan genfindes på både tegninger og konkrete 3D-modeller af de aktuelle figurer.

Hvor fx π er et fast symbol, der altid står for forholdet mellem omkreds og diameter i en cirkel, kan det være langt sværere at gennemskue symbolernes betydning, når navngivningen foregår ad hoc som når de forskellige stykker i prizme, cylinder og cylinderrør kaldes h , r , R , G osv.

Eleverne arbejder med arbejdskortene, der findes i nedenstående pdf-dokument, som indeholder spørgsmål om rumfang af prizmer, cylindre, cylinderrør, skæve prizmer og skæve cylindre.

Nedenfor er der lavet arbejdsark, der kan gives til grupper, der skal have en hjælpende hånd, eller som udfordring til grupper, der kan stilles større krav til.

Før den fælles afrunding af hver af de to lektioner beder man grupperne reflektere over dagens arbejde. Der kan stilles spørgsmål som:

- * *Hvad har I lært?*
- * *Hvad var særlig svært? og hvordan fandt I ud af det? var det tegningerne, at tegne selv, at have en 3D-model, at diskutere i gruppen, at tale med en lærer?*
- * *Er der noget, som virkede særlig godt, eller måske var irriterende?*

Disse refleksioner giver, sammen med gruppernes besvarelser af spørgsmålene på arbejdsarkene, et godt indblik i hvor tæt eleverne er på at opfylde de opstillede mål for lektionerne.

Links til arbejdskort

Arbejdsark: <https://tinyurl.com/y7uursvz>

Ekstra spørgsmål: <https://tinyurl.com/y9pnkzzq>

3. gang: Overfladeareal af cylindre og prismer

Lektionen starter med en grundig opsamling af elevernes væsentligste resultater fra sidst. Rumfangsformlerne skrives op, og gennem diskussionen skal eleverne ledes til at se ligheder og forskelle på formlerne. Eleverne kender rumfangsformlerne fra grundskolen, men hvilke argumenter hviler de på? Symbolernes rolle som etiketter pointeres. Hvad er det symbolerne kan? og hvorfor er de så vigtige i matematik?

I denne lektion er der fokus på udledning af arealformler ved hjælp af arbejdsark, som kan hentes via link sidst i afsnittet. Ved hjælp af konkrete materialer som et stykke papir og 3D-modeller skal eleverne selv argumentere for og opstille formlerne for overfladearealet af cylinder og prisme.

I forlængelse af arbejdsarkene fra 1. og 2. lektion arbejder eleverne med spørgsmål, hvor de skal bestemme dimensioner for cylindre og prismer, der opfylder særlige krav. Det betyder, at symbolerne nu har ændret status fra blot at være en etiket til at beskrive relationer mellem forskellige stykker som fx areal A , højde h , og radius r . Nogle elever vil opfatte spørgsmålene som meget abstrakte; når man har to cylindre, der skal have samme overfladeareal, så er højden h ikke bare længere h !

For at hjælpe eleverne på vej, findes ovenfor en række ekstra spørgsmål, hvor eleverne skal finde dimensionerne på konkrete cylindre og prismer, hvor nogle af de variable er kendte.

I stedet for den traditionelle opgaveregning, hvor eleverne benytter formlerne ved at indsætte givne talværdier, skal eleverne her opnå en forståelse for, de mange forskellige sammenhænge udtrykkene kan finde anvendelse i:

- * Hvis nogle af de variable kendes, kan andre findes.
- * Hvis én variabel ændres, har det betydning for værdien af de øvrige.
- * Når arealer og rumfang for cylindre og prismer sammenholdes, må der indføres nye symboler.
- * Hvordan navngiver man fornuftig?

For de grupper, der kommer hurtigt gennem arbejdsarkene, kan man blandt de ekstra spørgsmål også finde flere udfordringer. Nogle af dem er ikke helt nemme!

Lektionen afsluttes med refleksioner i grupperne og en kort afrunding.

Links til arbejdskort

Overfladearealer af cylinder:

<https://tinyurl.com/ybxryka6>

Ekstra spørgsmål:

<https://tinyurl.com/y7y7qk2c>

4. gang: Opsamling, opgaver og video

Lektionen starter med en opsummering af elevernes resultater fra sidste gang. Arealformlerne skrives op, og der skal lægges vægt på, hvordan formlerne ændrer sig afhængigt af om bund og top medregnes. I den formelsamling, der er benyttet i dette forløb (112), er det ikke altid tydeligt hvad der egentlig udregnes, så eleverne kan komme ud for at skulle afkode formlerne. Fx angives

$$\begin{aligned}O_A &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\ A &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (r+h)\end{aligned}$$

Men der står ikke, at den nederste formel er overfladearealet af en cylinder med bund og top, mens den øverste formel kun angiver arealet af den krumme overflade. Det er en væsentlig kompetence at kunne læse dette ud fra formlerne. I diskussionen skal det bemærkes, at det her er symbolernes rolle at beskrive relationer mellem forskellige variable.

Efter opsamlingen er der mulighed for at gøre flere ting. Nogle grupper har måske brug for lidt tid til at få lavet tidligere arbejdsark færdige, mens andre med fordel kan fordybe sig i nogle af de sammenhænge, de har fundet frem til. For at fokusere på mundtligheden og brugen af et korrekt matematisk sprog kan det anbefales at lade grupperne lave videoklip, hvor de forklarer eller argumenterer for deres resultater. Endelig er der også mulighed for at lade de elever, der har brug for træning, regne opgaver med de rumlige figurer, der indtil nu er blevet behandlet.

5. gang: Rumfang af pyramider

Arbejdskortene er denne gang delt op i mindre enheder for at skabe variation. Tanken er, at eleverne efter hvert kort kontakter læreren og fortæller, hvad de har fundet frem til før næste kort udleveres. Materialet er så omfattende, at det kan være nødvendigt at lade nogle grupper fortsætte arbejdet i den kommende lektion, hvor andre grupper er gået videre til keglen. Men man kan også på forhånd have udvalgt de kort, som alle grupper skal have set, og bruge de resterende som ekstra kort til grupper, der skal have flere udfordringer.

Den generelle rumfangsformel for en pyramide kan ikke vises på dette niveau, men for pyramider med kvadratisk grundfladen, hvor sidefladen er dobbelt så lang som højden, kan den eftervises med seks 3D-figurer af pyramider eller med en animation. Tal med grupperne om forskellen på at eftervise og at bevise ved hjælp af arbejdsarket, som kan hentes sidst i afsnittet.

Der er fokus på symbolernes rolle i formuleringen af matematiske påstande. Symbolerne i sig selv har ingen indflydelse på om disse påstande er rigtige eller

forkerte. Dette afhænger af det matematiske indhold i det, symbolerne refererer til. At $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$ for en pyramide er sandt, afhænger altså ikke af de valgte symboler V , h og G , men af pyramidens form.

Eleverne arbejder stadig med sammenhængen mellem figur, variabel og symbol for variabel samt med relationerne mellem de indgående variable repræsenteret ved deres symboler.

Der sluttet af med refleksioner. Man kan eventuelt lade eleverne reflektere individuelt, så de ikke skal "forhandle" om en fælles konklusion.

Links til arbejdskort

Rumfang af pyramider: <https://tinyurl.com/y932s6m5>

6. gang: Rumfang og overfladeareal af kegler

Opsamlingen tager afsæt i de erkendelser eleverne kom frem til gennem arbejdsarkene med pyramiden. I diskussionen skal der fokuseres på:

- Betydningen af pyramidens form fx grundfladen og om den er regulær/skæv
- Forskellen på at eftervise en påstand og at bevise den
- Symbolernes forskellige roller
- Ligheden mellem rumfanget af "skæve prismer med samme grundflade" og "skæve trekanter med samme grundlinje".

Emnet for dagens lektion er rumfang og overfladeareal af kegler. Materialet kan hentes sidst i afsnittet.

De indledende spørgsmål om rumfang er af samme type som for pyramiden. Herefter skal eleverne lave beregninger på kegler, hvor forskellige variable er kendte. Spørgsmålene kan laves på to niveauer: enten som konkrete talberegninger eller som symbolmanipulationer, hvor eleverne kommer frem til generelle udtryk.

Det første arbejdsark slutter med en diskussion af indholdet i rumfangsformlerne for pyramide og kegle, og her kan der komme forklaringer på mange niveauer. De dygtigste grupper skal holdes fast på præcise matematiske forklaringer, der indeholder overvejelser om overgangen fra polygon til cirkel og fra pyramide til kegle.

Herefter går eleverne videre med udtryk for overfladearealet af kegler, og her kan det være nødvendigt at fastholde alle grupper i, at de rent faktisk skal klippe en konkrete udfoldninger af en kegle ud i papir, og at den kan sammenholdes med 3D-figuren.

På de første to arbejdskort er formålet at eleverne diskuterer metoder til at foretage beregninger af radius, højde, buelængde, areal m.m. og at de kan se, hvor de forskellige størrelser på udfoldningen findes på keglen (3D-figuren). Det er fint, hvis eleverne kan tegne, farve, pege på de relevante stykker. Selve opskrivningen af de symbolske udtryk kommer først på kort 3, hvor eleverne igen skal tolke de symbolske udtryk for at finde ud af, hvilke udtryk, der beskriver de to situationer "med og uden bund". Det sidste kort kan man vælge

kun at give til de grupper, der har brug for ekstra udfordringer, idet kortet lægger op til en udledning af en formel for keglens overfladeareal.

Der sluttet af med refleksioner. Her har man som lærer mulighed for at give ekstra eller nye refleksionsspørgsmål, hvis der er områder, man gerne vil høre elevernes mening om eller opfattelse af.

Links til arbejdskort

Keglens rumfang: <https://tinyurl.com/ycnjz4t2>
Keglens overfladeareal: <https://tinyurl.com/y8t5vhe3>

7. gang: Pyramidestub og keglestub

I opsamlingen sammenlignes rumfangsformlerne for pyramide og kegle, og ligheder og forskelle trækkes frem.

Ligesom for cylinderen tages afkodningen/læsningen af de symbolske udtryk for overfladeareal op. Hvad er det, de forskellige led i formelen angiver?

Man kan eventuelt lade en gruppe gennemgå udledningen af formlerne for overfladearealet, hvis fx ikke alle grupper kom igennem det sidste kort.

Herefter vender vi tilbage til flere rumfangsformler. Materialet består af fire arbejdsark: to om pyramidestub (med kvadratisk bund hhv. generel pyramide), et om keglestub og et ark om formen af og sammenhængen mellem de forskellige symbolske udtryk. Arbejdskortet kan hentes sidst i afsnittet.

De nye rumlige figurer introduceres ved hjælp af de allerede kendte figurer pyramide og kegle. Det er derfor de allerede kendte symbolske udtryk, eleverne skal tage udgangspunkt i og bruge i en ny situation. Dette kræver indførelse af nye variable og dermed symboler, så det er vigtigt at eleverne hele tiden holdes fast på sammenhængen mellem konkret 3D-figur, tegning fra formelsamling og de benyttede symboler.

Det sidste arbejdskort fokuserer på formen af de symbolske udtryk, og eleverne skal ledes til at fortolke hvert led i hver formel. De bliver derfor først bedt om at lave en figur, der passer til hver formel, og derefter at sammenligne de to formler for pyramidestubbe hhv. formelen for keglestub og den generelle pyramidestubformel med hinanden. Mange elever vil sammenligne symbolerne i forhold til den placering de har i formlerne, og her skal de ledes til at gå videre og sammenligne det matematiske indhold (er arealet af det lille kvadrat, g er arealet af den lille grundflade, er arealet af den lille cirkel osv.).

Lektionen afsluttes med refleksioner.

Links til arbejdskort

Pyramidestub og keglestub: <https://tinyurl.com/y95o5zyd>

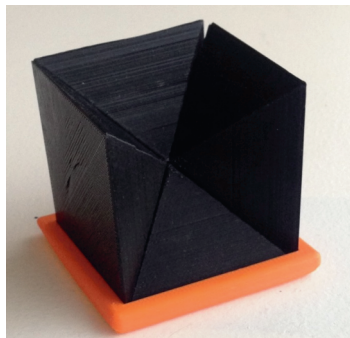
8. gang: Opsamling, beviser og opgaver

I opsamlingen fra sidst er der fokus på to ting:

- Hvordan man ud fra kendte former kan finde frem til nye formler - både med konkrete tal og beskrevet symbolsk.
- Hvordan oversættelse af formler kan vise sammenhæng i mellem de figurer, de beskriver.

I denne lektion får eleverne mulighed for at færdiggøre nogle af de ting, som måske ikke er nået de seneste par undervisningsgange.

Man kan vælge at lave et stringent bevis for et af de udtryk, eleverne har arbejdet med, men som ikke alle grupper har været i stand til at gå i dybden med fx overfladeareal af keglen eller rumfang for keglestub eller pyramidestub, når rumfangsformlen for pyramide eller kegle antages kendt. Nogle elever vil have savnet den tryghed, det giver, at læreren (be)viser noget, og de vil derfor være meget opmærksomme.



Mens læreren beviser den valgte "sætning", bør man bemærke den funktion brugen af symbolerne har undervejs: fra etiket, der refererer til en figur til en måde at beskrive relationer på og til at vise matematiske påstande.

I forlængelse af beviset kan grupperne (eller nogle af dem) selv producere videoer, hvor de viser et af de resultater/formler de er kommet frem til. For nogle grupper kan det være rigeligt at skulle vise en opgave eller nogle af de manipulationer, der er arbejdet med på arbejdsarkene fx Kegle's rumfang spørgsmål f), g) eller h).

Endelig kan der bruges til på opgaveregning. Enten kan man give eleverne opgaver tilpasset den enkelte gruppes behov, eller man kan selv bede eleverne lave opgaver, måske til hinanden eller til kommende afleveringsopgaver.

9. gang: Kuglen

Inden eleverne går i gang med kuglen, får de først en lille læseøvelse om cirklen. Her i introduceres den tankegang, som senere bruges ved kuglen. Læseøvelsen og arbejdskort kan hentes sidst i afsnittet.

Læseøvelsen foregår således:

Første elev i gruppen læse op frem til første STOP OP OG FORKLAR. Herefter skal eleven forklare resten af gruppen, hvilke argumenter/forudsætninger etc. der er brugt i teksten. Gruppen skal blive enige om at det er de korrekte formler, der er brugt i teksten.

Herefter læser næste elev højt frem til næste STOP OP OG FORKLAR. I dette afsnit skal eleven forklare sammenhængen mellem teksten og den figur, der er vist på arbejdsarket. Alle skal være enige om, at det er korrekt, hvad der står, og at den viste trekant har det angivne areal.

Derefter fortsættes på samme måde til hele arket er læst og indholdet forklaret, så alle i gruppen er med.

Læseøvelsen efterfølges af et arbejdsark om kuglens rumfang, hvor eleverne skal overføre idéen om at opdele en figur i mange små dele, der kan tilnærmes med noget, hvis areal eller rumfang man kan beregne. Lægges alle delene sammen får man det samlede areal/rumfang.

Symbolernes rolle i denne lektion er fortrinsvis til at formulere matematiske påstande og relationer. På arbejdsarket er de forskellige størrelser: kuglens radius, overfladeareal og rumfang ikke navngivet, så her skal eleverne selv vælge symboler. Dette vil sandsynligvis føre til at symboler som r , A og V bliver anvendt i såvel læseøvelsen som på arbejdsarket, men med forskellig betydning. Dette kan give problemer for nogle elever, og er derfor værd at bemærke, når man taler med grupperne.

Inden den afsluttende refleksion skal eleverne dels regne en traditionel opgave og dels selv formulere en opgave fra deres omverden, så også modellering kommer i spil.

Links til arbejdskort

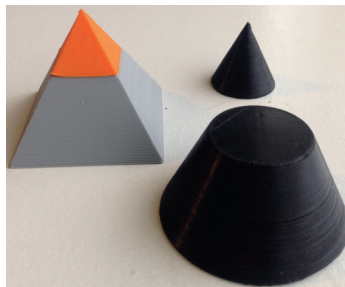
Læseøvelse om cirkelns areal: <https://tinyurl.com/ya4tcoaz>

Kuglens rumfang: <https://tinyurl.com/ybowd9f3>

10. gang: Afslutning

Med denne undervisningsgang afsluttes forløbet om rumlige figurer, hvor en væsentlig bestanddel har været at undersøge og konkretisere de benyttede symboler og deres forskellige roller.

Der indledes med en opsamling på foregående lektions arbejde om cirkel og kugle. Her er det ikke de konkrete resultater/formler, der er væsentligst, men den type argumentation eleverne er blevet bekendt med.



Gennem forløbet har eleverne set rigtig mange formler for overfladeareal og rumfang af forskellige typer rumlige figurer. I formelsamlingen findes der mange andre formler, som eleverne også kan få brug for, herunder lignende formler for cirklen. Resten af lektionen er derfor helliget opgaveregning, hvor der arbejdes med opgaver (evt. gamle eksamensopgaver), som trækker på formler om fx kugleafsnit, pillhøjde osv.

Før den afsluttende refleksion kan man indlægge en klassediskussion om forløbet, hvor man trækker formålet med forløbet frem. Det vil også være naturligt at komme ind på fagets metoder både generelt og i særdeleshed, hvordan de er blevet benyttet i dette forløb.

Elevernes refleksioner omfatter hele forløbet og kan indeholde spørgsmål om:

- * *arbejdsform (er det lærer eller elever, der laver arbejdet?!)*
- * *skrivning af noter/resultater, tegning af figurer og forståelse af deres betydning*
- * *brug af konkrete materialer*
- * *symbolers rolle i matematikken*