

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.  
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **III**, 2.

---

# UEBER EIN ELEMENTARES VARIATIONSPROBLEM

VON

JULIUS PÁL



KØBENHAVN

HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1920



## 1. Fragestellung.

1°. Es sei  $\mu$  eine ebene, beschränkte Punktmenge,  $d$  bedeute die Entfernung zweier Punkte der Menge,  $D = D(\mu)$  sei die obere Grenze aller Zahlen  $d$ . Dann heisst bekanntlich die Zahl  $D$  der Durchmesser der Menge  $\mu$ . Neben der Zahl  $D$  werden wir auch jede Strecke von der Länge  $D$ , die zwei Punkte von  $\mu$  verbindet, einen Durchmesser von  $\mu$  nennen.

In dieser Arbeit bedeute  $\mu$  immer eine Menge, deren Durchmesser  $D(\mu) = 1$  ist.

Schneidet man aus Papier eine kreisförmige Tafel mit dem Radius 1 aus, so kann man mit dieser jede Menge  $\mu$  überdecken; man braucht hierzu nur den Mittelpunkt des Kreises auf einen Punkt von  $\mu$  zu legen.

Herr JUNG<sup>1</sup> wies nach, dass auch der viel kleinere Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577 \dots$  diese Ueberdeckungseigenschaft hat; dass nicht ein noch kleinerer Kreis sie haben kann, ist klar; denn er versagt, wenn man das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 1 überdecken will.

Die JUNG'sche Kreistafel hat den Flächeninhalt  $\frac{\pi}{3} = 1,04719 \dots$

<sup>1</sup> Journal für reine u. angew. Math., tom. 123 und tom. 137, pg. 310.  
Siehe auch R. BRICARD, Nouvelles Annales de Math., t. 14 (1914), pg. 19—25 und J. PÁL, ebenda, t. 15 (1915), pag. 30—31.

Unter den nicht-kreisförmigen Tafeln gibt es solche, die die Ueberdeckungseigenschaft haben und deren Fläche kleiner, als  $\frac{\pi}{3}$  ist. Ein Beispiel ist die quadratförmige Tafel von der Fläche 1.

2°. Herr LEBESGUE hatte im Jahre 1914 die Güte meine Aufmerksamkeit auf folgende, an das JUNG'sche Resultat anschliessende Frage zu richten:

Unter allen Tafeln, welche die Ueberdeckungseigenschaft haben, ist diejenige zu bestimmen, welche minimales Flächenmass hat. In voller Ausführlichkeit und Praecision ist die Frage die folgende:

Es sei  $T$  eine konvexe Tafel, die fähig ist eine beliebige Punktmenge vom Durchmesser 1 zu überdecken. Das Flächenmass von  $T$  sei  $\tau = \tau(T)$ , die untere Grenze aller Zahlen  $\tau$  sei  $\tau_0$ .

a) Es ist der Zahlenwert von  $\tau_0$  zu bestimmen.  
 b) Es ist festzustellen, ob es unter den Tafeln  $T$  solche gibt, deren Flächenmass  $\tau_0$  ist.

c) Wenn b) bejaht wird, sind alle Tafeln  $T$  vom Flächenmass  $\tau_0$  der Form nach zu bestimmen.

3°. Es ist mir nicht gelungen, dieses Variationsproblem zu lösen; ich habe nur Beiträge zur Lösung gefunden. Da ich zur Zeit keinen Weg sehe, auf dem ich zur vollen Lösung gelangen könnte, teile ich meine Beiträge in dieser Arbeit mit. Vielleicht genügen sie, um einen Leser für dieses — wie mir scheint — wirklich schöne Problem zu interessieren und ihm eventuell bei der vollen Beantwortung der Frage Hülfe zu leisten.

Da jede brauchbare Tafel den Kreis mit dem Durchmesser 1 enthält und da das Einheitsquadrat eine brauchbare Tafel ist, besteht die Ungleichheit

$$\frac{\pi}{4} \leq \tau_0 \leq +1 \quad \text{oder} \quad 0,7854 < \tau_0 \leq +1. \quad (1)$$

Mein erstes Trachten war diese trivialen Unbestimmtheitsgrenzen durch schärfere zu ersetzen.

## 2. Numerische obere Näherungswerte für $\tau_0$ .

Zunächst verschärfe ich die obere Unbestimmtheitsgrenze dadurch, dass ich brauchbare Tafeln angebe, wie ich sie der Reihe nach gefunden habe.

1°. In Fig. 1 ist  $ABCD$  das Einheitsquadrat. Wir ziehen um seinen Mittelpunkt den Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{2}$  und zu diesem die vier Tangenten, welche parallel zu den Diagonalen des Quadrats laufen. Es entstehen ein Achteck und vier Dreiecke; gemeinsame Punkte des Achteckes und eines Dreieckes rechnen wir zum Achteck.

Plaziert man die Menge  $\mu$  auf dem Quadrat, so wird von den beiden an  $A$  und  $C$  anstossenden Dreiecken höchstens eines, z. Bp. das an  $A$  anstossende, Punkte von  $\mu$  enthalten. Dasselbe gilt von den beiden andern Dreiecken. Daher stellt das in

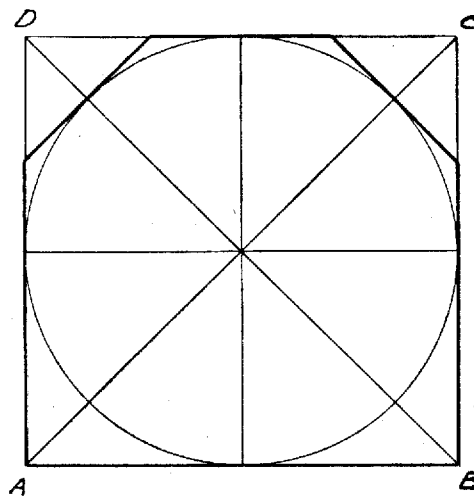


Fig. 1.

Fig. 1 stark ausgezogene Sechseck eine brauchbare Tafel dar; sie soll  $T_1$  heissen. Ihr Flächenmass ist

$$\tau_1 = \sqrt{2} - \frac{1}{2} = 0,9142 \dots$$

Damit verschärft sich (1) in

$$\frac{\pi}{4} \leq \tau_0 \leq \sqrt{2} - \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Es scheint mir, dass die hiermit gewonnene obere Unbestimmtegrenze von  $\tau_0$  durch ganz elementare Ueberlegungen nicht mehr verschärft werden kann.

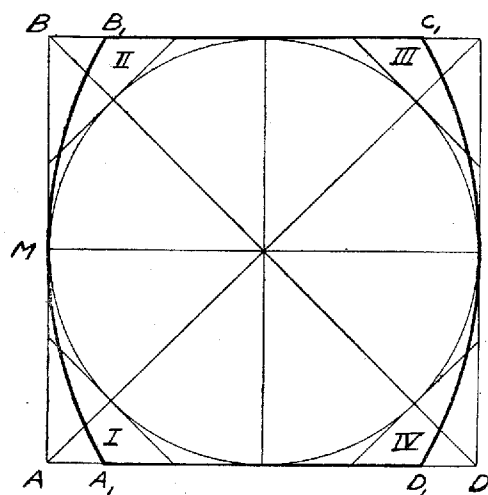


Fig. 2.

2°. In Fig. 2 ist  $ABCD$  das Einheitsquadrat,  $M$  und  $N$  sind die Mittelpunkte der Quadratseiten  $AB$  und  $CD$ . Um  $M$  und  $N$  schlagen wir Kreise mit dem Radius 1; der gemeinsame Teil der zwei Kreisflächen und der Quadratfläche ist die konvexe Tafel  $A_1 MB_1 C_1 ND_1 A_1$ ; sie soll  $T_2$  heissen.

$T_2$  ist, wie wir nachweisen werden, eine brauchbare Tafel. Ihr Flächenmass ist

$$\tau_2 = \tau(T_2) = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = 0,9132 \dots < \tau_1.$$

Somit sieht man, dass  $T_1$  keine minimale Tafel ist. Trotzdem, dass die Brauchbarkeit von  $T_1$  trivial einfach

einzusehen und  $\tau_1 - \tau_2$  nur  $\frac{1}{1000}$  ist, kann ich die Brauchbarkeit von  $T_2$  nur durch umständlichere Ueberlegungen nachweisen. Vor allem sei bemerkt:

3°. Ist  $v$  eine beschränkte, ebene, nicht lineare Punktmenge, so gibt es bekanntlich einen beschränkten, abgeschlossenen, konvexen Bereich  $v^*$ , für welchen  $D(v^*) = D(v)$  ist. Die Grenze von  $v^*$  ist eine konvexe Jordan-Kurve, deren grösste Sehne  $D(v)$  ist.

Demnach ist eine Tafel gewiss brauchbar, wenn auf ihr jede konvexe Jordan-Kurve, deren grösste Sehne die Länge 1 hat, Platz findet.

Diese kleine Bemerkung ist deshalb von Bedeutung, weil erst sie Stetigkeitsbetrachtungen im Folgenden ermöglicht.

4°. Des weiteren beweise ich einen allgemeinen Satz über Punktmenge, der auch für sich selbst ein gewisses Interesse haben mag.

Satz A: Eine beliebige ebene, beschränkte Punktmenge  $\alpha$  ist Teilmenge eines konvexen Bereiches von der konstanten Breite  $D(\alpha)$ .

Ist  $\alpha^*$  der kleinste konvexe Bereich, der  $\alpha$  enthält, so ist  $D(\alpha^*) = D(\alpha)$  und deshalb kann man beim Beweise des eben formulierten Satzes  $\alpha$  von vornherein als konvexen Bereich voraussetzen; die Grenzkurve von  $\alpha$  heisse  $\bar{\alpha}$ .

Es sei  $\gamma$  ein beliebiger konvexer Bereich mit der Grenzkurve  $\bar{\gamma}$ . Wir denken uns alle Durchmesser von  $\gamma$  gezogen; ihre Endpunkte bilden eine — wie leicht sichtbar — abgeschlossene Menge  $\sigma = \sigma(\gamma)$ , die eine Teilmenge von  $\bar{\gamma}$  bildet. Ist speziell  $\sigma(\gamma) \equiv \bar{\gamma}$ , so heisst dieses, dass von jedem Grenzpunkt von  $\gamma$  ein Durchmesser von  $\gamma$  ausgeht.

Vorbereitend den Beweis des Satzes A beweisen wir zunächst, dass ein konvexer Bereich  $\gamma$  existiert, der  $\alpha$  enthält und für welchen

$$D(\gamma) = D(\alpha) \quad \text{und} \quad \sigma(\gamma) \equiv \bar{\gamma} \quad (3)$$

ist.

(Ist z. Bp.  $\alpha$  die Fläche des gleichseitigen Dreieckes  $PQR$ , so besteht  $\sigma(\alpha)$  aus den drei Punkten  $P$ ,  $Q$  und  $R$ ; das gleichseitige Kreisbogendreieck mit den Ecken  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  ist dann ein Bereich  $\gamma$ , der die Eigenschaften (3) besitzt.)

Die Existenz von  $\gamma$  zeigt man wie folgt:

Es sei  $BC$  ein Durchmesser von  $\alpha$ . Wir legen in der Ebene von  $\alpha$  ein Koordinatensystem  $(xy)$  an, dessen  $x$ -Achse  $BC$  enthält; die beiden durch  $B$  und  $C$  begrenzten Bogen von  $\bar{\alpha}$  sollen durch

$$y = f(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + D(\alpha), \quad f(x) \geq 0$$

und

$$y = g(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + D(\alpha), \quad g(x) \leq 0$$

dargestellt sein.

Wird der Bogen  $y = f(x)$  durch  $\sigma(\alpha)$  nicht erschöpft, d. h. endigt nicht in jedem Punkte des Bogens ein Durchmesser von  $\alpha$ , so kann man einen konvexen Bogen

$$y = F(x), \quad x_0 \leq x \leq x_0 + D(\alpha), \quad F(x) \geq f(x)$$

so finden, dass die beiden Bogen  $F(x)$  und  $g(x)$  eine konvexe Kurve  $\bar{\beta}$  ergeben, die den Durchmesser  $D(\alpha)$  hat und in welcher der Bogen  $F(x)$  durch  $\sigma(\beta)$  schon erschöpft wird.

Dann ersetzen wir — wenn nötig — den Bogen  $g(x)$  von  $\bar{\beta}$  durch einen entsprechenden Bogen  $G(x)$  und gelangen so von  $\bar{\beta}$  zu  $\bar{\gamma}$ . Freilich genügt es den Uebergang von  $f(x)$  zu  $F(x)$  zu besprechen.



Es seien

$$r_1, r_2, \dots, r_i, \dots \quad (4)$$

die rationalen Zahlen des Intervalls  $x_0 < x < x_0 + D(\alpha)$ . Aus der Voraussetzung, dass der Bogen  $f(x)$  durch  $\sigma(\alpha)$  nicht erschöpft wird, und aus der Abgeschlossenheit von  $\sigma(\alpha)$  folgt, dass es Punkte  $x = r_i, y = f(r_i)$  gibt, deren Maximaldistanz von  $\alpha$  kleiner als  $D(\alpha)$  ist. Es sei  $x = r_{n_1}$  die in (4) zuerst anzutreffende Zahl, die einen solchen Punkt liefert.

Auf dem Halbstrahl  $x = r_{n_1}, y > f(r_{n_1})$  gibt es einen (und nur einen) Punkt, dessen Maximaldistanz von  $\alpha$  genau gleich  $D(\alpha)$  ist; er soll  $R_1$  heissen. Den kleinsten konvexen Bereich, der  $(\alpha + R_1)$  enthält, nenne ich  $\alpha_1$ ; mit ihm sind auch  $\bar{\alpha}_1$ , und  $\sigma_1(\alpha_1)$  gegeben.

Aus  $D(\alpha + R_1) = D(\alpha_1) = D(\alpha)$  folgt, dass  $\sigma(\alpha)$  eine Teilmenge von  $\sigma(\alpha_1)$  ist und zwar eine echte Teilmenge, wie der Punkt  $R_1$  zeigt.

Der obere Bogen  $y = f_1(x)$  von  $\bar{\alpha}_1$  enthält Strecken derjenigen Stützgeraden, welche von  $R_1$  aus an  $\bar{\alpha}$  gelegt werden können. Innere Punkte dieser Strecken können — im Sinne elementargeometrischer Ueberlegung — nicht zu  $\sigma(\alpha_1)$  gehören. Daher gibt es Punkte  $x = r_i, y = f_1(r_i)$ , deren Maximaldistanz von  $\alpha_1$  kleiner als  $D(\alpha)$  ist. Es sei  $x = r_{n_2}$  die in (4) zuerst anzutreffende Zahl, die einen solchen Punkt liefert. Aus der Bedeutung von  $n_2$  folgt  $n_2 > n_1$ . Auf dem Halbstrahl  $x = r_{n_2}, y > f_1(r_{n_2})$  gibt es einen (und nur einen) Punkt  $R_2$ , dessen Maximaldistanz von  $\bar{\alpha}_1$  genau gleich  $D(\alpha)$  ist. Die kleinste konvexe Menge, die  $(\alpha_1 + R_2)$  enthält, sei  $\alpha_2$ . Durch Fortsetzung haben wir allgemein  $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$  und  $\sigma(\alpha_i)$ .

Auf dem oberen Bogen  $y = f_i(x)$  von  $\bar{\alpha}_i$  liefern die

Abzissenwerte  $x = r_1, r_2, \dots, r_i$  lauter Punkte, die zu  $\sigma(\alpha_i)$ , also auch zu den folgenden  $\sigma(\alpha_{i+n})$  gehören.

Da  $\alpha_i$  in  $\alpha_{i+1}$  enthalten ist, folgt aus  $D(\alpha_i) = D(\alpha)$ , dass

$$D(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots) = D(\alpha)$$

ist. Ist  $\beta$  die kleinste konvexe Menge, die  $(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots)$  aufnimmt, so ist auch

$$D(\beta) = D(\alpha).$$

Aus der letzten Gl. folgt, dass alle Punkte von  $\sigma(\alpha_i)$  an der Grenze von  $\beta$  liegen und zu  $\sigma(\beta)$  gehören. Also gehen aus allen Punkten des oberen Bogens von  $\beta$ , welche rationale Abzissen haben, Durchmesser von  $\beta$  aus. Aus der Abgeschlossenheit von  $\sigma(\beta)$  folgt dann, dass der obere Bogen von  $\beta$  ein Bogen  $y = F(x)$  von der behaupteten Eigenschaft ist. In derselben Art ersetzt man  $\beta$  durch  $\bar{\gamma}$ ; damit ist dann die Existenz von  $\gamma$  bewiesen.

5°. Aus  $\gamma \equiv \sigma(\gamma)$  folgert man unmittelbar, dass für jeden Punkt  $S$  der Ebene, der nicht zu  $\gamma$  gehört,

$$D(\gamma + S) > D(\gamma) \quad (5)$$

ist und aus (5) schliesst man mit Benutzung eines Satzes des Herrn MEISSNER<sup>1</sup>, dass  $\gamma$  eine Figur von konstanter Breite ist.

Um den elementaren Charakter dieser Arbeit möglichst zu wahren, beweise ich auch direkt, dass aus  $\sigma(\gamma) \equiv \bar{\gamma}$  die konstante Breite von  $\gamma$  gefolgert werden kann, d. h. dass unter der gemachten Voraussetzung jedes System paralleler Sehnen von  $\gamma$  eine Sehne von der Länge  $D(\gamma)$  enthält.

<sup>1</sup> Punktmengen konstanter Breite. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft, Zürich, 1911.

Wählen wir die  $x$ -Achse parallel zur betrachteten Sehnenschar;  $\gamma$  sei im Streifen  $y_0 \leq y \leq Y_0$  enthalten. Aus  $\sigma(\gamma) \equiv \bar{\gamma}$  folgt, dass jede der Geraden  $y = y_0$  und  $y = Y_0$  je einen Punkt von  $\gamma$  enthält; sie sollen  $A$  und  $B$  heissen.

Es sei  $y = y'$  ein solcher Wert, dass der Streifen  $y_0 \leq y \leq y'$  keinen Durchmesser von  $\gamma$  enthält; die obere Grenze aller  $y'$  sei  $\bar{y}$ . Da es gewiss Durchmesser von  $\gamma$  gibt, die weder  $A$ , noch  $B$  enthalten, ist  $\bar{y} < Y_0$ . Die Gerade  $y = \bar{y}$  schneidet  $\bar{\gamma}$  in zwei Punkten. Sie sollen  $M$  und  $N$  heissen.

Aus der Bedeutung von  $\bar{y}$  folgt, dass aus einem der Punkte  $M$  und  $N$ , z. Bp. aus  $M$  ein Durchmesser  $MC$  ausgeht, der ganz im Streifen  $y_0 \leq y \leq \bar{y}$  verläuft.

Wählen wir nun eine Folge von Durchmessern  $M_1D_1, M_2D_2, \dots$  so, dass die Punkte  $M_1, M_2, \dots$  im Streifen  $y < \bar{y}$  liegen und gegen  $M$  konvergiren, während gleichzeitig auch die Folge  $D_1, D_2, \dots$  gegen einen Punkt  $D$  konvergirt. Dann liegt  $D$  in der Halbebene  $y \geq \bar{y}$ .

Fällt  $C$  mit  $D$  zusammen, so ist der Durchmesser  $MC$  parallel der  $x$ -Achse. Im andern Fall betrachten wir denjenigen Bogen  $CD$  von  $\bar{\gamma}$ , der  $M$  nicht enthält. Es sei  $P$  ein innerer Punkt dieses Bogens. Der Endpunkt des von  $P$  ausgehenden Durchmessers kann kein innerer Punkt des Bogens  $MCD$  sein, da  $MD$  ein Durchmesser ist; er kann auch nicht innerhalb des Bogens  $MDC$  liegen, da  $MC$  ein Durchmesser ist; folglich ist jener Endpunkt der Punkt  $M$ , d. h. es ist  $MP = D(\gamma)$ .

Dreht man also die Strecke  $MC$  in die Lage  $MD$ , so bleibt sie immer ein Durchmesser von  $\gamma$  und passirt eine zur  $x$ -Achse parallele Lage.

Hiermit ist der Satz A voll bewiesen. Aus ihm folgt:

Eine Tafel ist brauchbar, wenn man auf ihr jede konvexe Figur von der konstanten Breite 1 plazieren kann.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Ich möchte hier einige mit dem Obigen zusammenhängende Bemerkungen einschalten.

1) Bekanntlich besteht für die konvexe Kurve  $\bar{\alpha}$  die von CAUCHY herrührende Formel

$$\text{Umfang von } \bar{\alpha} = \int_0^\pi B(\varphi) d\varphi, \quad (1)$$

in welcher  $B(\varphi)$  die Entfernung der beiden in der Richtung  $\varphi$  verlaufenden Stützgeraden von  $\alpha$  bedeutet.

Aus  $D(\alpha) = \text{Max } B(\varphi)$  und aus der Stetigkeit von  $B(\varphi)$  folgt, dass

$$\text{Umfang von } \bar{\alpha} \leq \pi D(\alpha) \quad (2)$$

ist und dass das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn  $\alpha$  von konstanter Breite ist.

Die strenge Begründung der Formel (1) erfordert entweder die LEBESQUE'sche Integraltheorie oder die Approximation von  $\bar{\alpha}$  durch konvexe Kurven, die einen stetig variirenden Krümmungsradius haben, der nicht verschwindet und endlich bleibt.

Wäre es möglich die in (1) speciell enthaltene sogenannte BARBIER'sche Formel (Journal de Math., (2), 5, 1860)

$$\text{Umfang von } \bar{\gamma} = \pi D(\gamma) \quad (3)$$

mit einfacheren Hilfsmitteln zu beweisen, so wäre die Ungleichung (2) mit gleicher Einfachheit bewiesen. Denn es ist laut der Bedeutung von  $\alpha$  und  $\gamma$

$$\text{Umfang von } \bar{\alpha} \leq \text{Umfang von } \bar{\gamma} = \pi D(\alpha) \quad (4)$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn  $\alpha$  selbst von konstanter Breite ist.

2) Aus (2) folgt mit Hilfe der klassischen Isoperimetrie des Kreises, dass

$$\text{Flächenmass von } \alpha \leq \text{Flächenmass von } \gamma \leq \frac{\pi}{4} [D(\alpha)]^2.$$

Das erste Gleichheitszeichen gibt nur, wenn  $\alpha$  von konstanter Breite ist, das zweite nur, wenn  $\gamma$  der Kreis ist; dieses heisst: Unter allen Figuren gegebenen Durchmessers hat der Kreis und nur der Kreis maximales Flächenmass.

Dieser Satz wurde mir 1914 von Herrn LEBESGUE nebst seiner Herleitung aus der Isoperimetrie des Kreises brieflich mitgeteilt; nachträglich teilte mir Herr LEBESGUE (1914) mit, dass er auch einen andern Beweis fand, der die Isoperimetrie des Kreises nicht in Anspruch nimmt.

6°. Nun ist alles vorbereitet, um die Brauchbarkeit der Tafel  $T_2$  nachzuweisen.

Zuerst zeigen wir, dass die konvexe Kurve  $\bar{\gamma}$  auf  $T_2$  gewiss Platz findet, wenn man aus jedem Punkte von  $\bar{\gamma}$  einen und nur einen Durchmesser von  $\gamma$  ziehen kann.

Es sei  $CC'$  ein Durchmesser von  $\gamma$ . Durchläuft  $P$  den Bogen  $CC'$  etwa in positivem Sinne, so wird der Endpunkt  $P'$  des von  $P$  ausgehenden Durchmessers den Bogen  $C'C$  ebenfalls in positivem Sinne durchlaufen und zwar entspricht einer stetigen Bewegung von  $P$  eine stetige Bewegung von  $P'$ .

Legen wir ein Koordinatensystem in die Ebene von  $\gamma$  so, dass die Punkte  $C$  und  $C'$  die Koordinaten  $C$  ( $x=0$ ,  $y=0$ ) und  $C'$  ( $x=1$ ,  $y=0$ ) haben sollen und bewegen wir dieses Koordinatensystem in der Zeit  $0 \leq t \leq 1$  stetig so,

Meines Wissens hat Herr BIEBERBACH den Satz zuerst publice ausgesprochen und einen überaus schönen, einfachen Beweis des Satzes gegeben. (Ueber eine Extremaleigenschaft des Kreises. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 1915).

3) Ob Her LEBESGUE für die Herleitung von (2) auf die Gl. (1) rekurrierte oder nur den speziellen Satz von BARBIER benutzend, die oben ausgeführte Ergänzung von  $\alpha$  zu  $\gamma$  im Sinne hatte, kann ich nicht entscheiden.

4) Ist  $\alpha$  eine räumliche Punktmenge, so ist seine Ergänzung zu  $\gamma$  nach demselben Recept, wie in der Ebene, möglich. Aus dem MEISSNERschen Satze folgt dann, dass  $\gamma$  ein Körper konstanter Breite ist.

Eine beliebige beschränkte räumliche Punktmenge  $\alpha$  ist Teilmenge eines konvexen Körpers von der konstanten Breite  $D(\alpha)$ .]

Hieraus folgt mit einem Schlage unter anderem:

Ist  $\beta$  eine beschränkte Punktmenge und endigt in jedem Punkt von  $\beta$  ein Durchmesser von  $\beta$ , so liegt  $\beta$  auf der Oberfläche eines konvexen Körpers von der konstanten Breite  $D(\beta)$ .

(Siehe hierzu: FUJIWARA, On space curves of constant breath, The Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 5 (1914) und BLASCHKE, Ueber Raumkurven von konstanter Breite, Berichte der Math. Phys. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss., Leipzig, Bd. LXVI, 1914.)

dass sein Anfangspunkt den Bogen  $CC'$  beschreiben soll und die positive  $x$ -Achse immer einen Durchmesser enthalte. Der Bogen von  $\bar{\gamma}$ , der in die Halbebenen  $\begin{matrix} y \geq 0 \\ y \leq 0 \end{matrix}$  fällt, soll von der  $x$ -Achse die Maximalentfernung  $\begin{matrix} u(t) \\ v(t) \end{matrix}$  haben. Da  $u(t)$  und  $v(t)$  stetige Zeitfunktionen sind und

$$u(0) - v(0) = -[u(1) - v(1)]$$

ist, gibt es einen Wert  $t = t_0$ , in welchem

$$u(t_0) = v(t_0)$$

also  $u(t_0) \leq \frac{1}{2}$  und  $v(t_0) \leq \frac{1}{2}$  ist. Im Zeitmoment  $t_0$  sei der Nullpunkt des bewegten Koordinatensystems in  $P_0$ , der zugehörige Durchmesser endige in  $P_0'$ .

Legt man  $\gamma$  so in die Ebene von  $T_2$ , dass die Strecke  $P_0P_0'$  auf  $MN$  fällt, so wird  $T_2$  die ganze Figur  $\gamma$  enthalten.

7°. Etwas ausführlicher gestaltet sich die Ueberlegung, wenn aus manchen Punkten von  $\gamma$  mehrere Durchmesser ausgehen.

Es sei  $CC'$  ein Durchmesser von  $\gamma$  und  $c$  einer der durch  $C$  und  $C'$  begrenzten Teilbogen von  $\bar{\gamma}$ . Ein Punkt, der in der Richtung  $CC'$  den Bogen  $c$  durchläuft, soll in  $V$  zuerst den Kreis treffen, der um  $C$  mit dem Radius 1 beschrieben wurde. Ein Punkt, der den Teilbogen  $VC$  von  $c$  in der Richtung  $VC$  durchläuft, soll zuerst in  $U$  den Kreis treffen, welcher um  $V$  mit dem Radius 1 beschrieben wird. Der Teilbogen  $UV$  von  $c$  heisse  $w$ . Wir wählen ein Koordinatensystem  $(xy)$  so, dass  $U$  und  $V$  die Koordinaten  $U(x=0, y=0)$  und  $V(x=1, y=0)$  haben sollen und stellen  $w$  in der Form

$$y = G(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

dar. Für jeden Punkt von  $w$  definieren wir nun (um die

Vorstellung zu fixieren) einen Hauptdurchmesser wie folgt: Für  $U$  und  $V$  sei die  $x$ -Achse der Hauptdurchmesser; bei einem inneren Punkt  $P$  von  $w$  nehmen wir von allen von  $P$  ausgehenden Durchmessern denjenigen, dessen von  $P$  verschiedener Endpunkt die kleinste Abscisse hat und nennen diesen den Hauptdurchmesser von  $P$ .

Der Hauptdurchmesser von  $P = P(x)$ ,  $0 < x < 1$ , hat seinen Endpunkt unterhalb  $UV$  und schneidet daher  $UV$ . Danach können wir auf dem Hauptdurchmesser von  $P$  eine positive und negative Seite unterscheiden, indem wir verabreden:  $\begin{smallmatrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{smallmatrix}$  Seite des Hauptdurchmessers sei diejenige, welche den Punkt  $\begin{smallmatrix} V \\ U \end{smallmatrix}$  enthält. Wir verabreden weiterhin, dass für  $U$  die  $\begin{smallmatrix} \text{positive} \\ \text{negative} \end{smallmatrix}$  Seite des Hauptdurchmessers die Halbebene  $\begin{smallmatrix} y \geq 0 \\ y \leq 0 \end{smallmatrix}$  sein soll und umgekehrt für den Punkt  $V$ .

Der Bogen von  $\bar{\gamma}$ , der auf der  $\begin{smallmatrix} \text{positiven} \\ \text{negativen} \end{smallmatrix}$  Seite des Hauptdurchmessers von  $P = P(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  liegt, hat von diesem die maximale Entfernung  $\begin{smallmatrix} v(x) \\ u(x) \end{smallmatrix}$  und es sei

$$\varphi(x) = v(x) - u(x).$$

Wenn für ein  $x = x_0$ ,  $0 \leq x_0 \leq 1$  der Wert  $\varphi(x_0) = 0$  ist, so ist  $u(x_0) \leq \frac{1}{2}$ ,  $v(x_0) \leq \frac{1}{2}$  und man kann  $\gamma$  auf  $T_2$  dadurch plazieren, dass man den Hauptdurchmesser des Punktes  $x = x_0$  auf die Strecke  $MN$  legt. Ist für jedes  $x$  des Intervalls  $0 \leq x \leq 1$  der Wert  $\varphi(x) \neq 0$ , so verfähre man so: Mit Ausnützung von

$$\varphi(1) = -\varphi(0) \neq 0$$

bestimme man durch die Methode der Einschachtelung zwei Folgen

$$0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \dots, \xi_n \rightarrow \alpha,$$

$$1 \geq \eta_1 \geq \eta_2 \geq \eta_3 \geq \dots, \eta_n \rightarrow \alpha,$$

so dass für jedes  $n$

$$\varphi(\xi_n) < 0 < \varphi(\eta_n)$$

sei. Der Punkt  $x = \alpha$  von  $w$  heisse  $K$ .

Wir besprechen nur den Fall, in dem  $K$  ein innerer Punkt von  $w$  ist; fällt  $K$  mit  $U$  oder  $V$  zusammen, so ist die Ueberlegung nur ganz leicht zu modifizieren.

In der Folge der zu  $x = \xi_1, \xi_2, \dots$  gehörigen Hauptdurchmesser gibt es eine Teilfolge der Beschaffenheit, dass die unterhalb der  $x$ -Achse gelegenen Endpunkte der Durchmesser gegen einen Punkt  $P$  konvergieren; da gleichzeitig die oberen Endpunkte gegen  $K$  konvergieren, sagen wir: Die Durchmesser dieser Teilfolge konvergieren gegen  $KP$ .

Ebenso gibt es eine Teilfolge der zu  $x = \eta_1, \eta_2, \dots$  gehörigen Folge von Hauptdurchmesser, die gegen einen Durchmesser  $KQ$  konvergiert.

Wir betrachten nun den Bogen  $PQ$  von  $\bar{\gamma}$ , der unterhalb der  $x$ -Achse liegt. Ein Punkt dieses Bogens sei  $R$ . Die Bogen  $KUR$  und  $KVR$  von  $\bar{\gamma}$  haben von der Geraden  $KR$  Maximalentfernungen, die wir mit  $u(R)$  und  $v(R)$  bezeichnen wollen; aus der Existenz der Durchmesser-Folge, die gegen  $KP$  konvergiert, und in der ständig  $\varphi(\xi_n) \leq 0$  ist, folgt, dass

$$u(P) \leq v(P)$$

ist, während aus der andern Folge die Ungleichung

$$u(Q) \geq v(Q)$$

folgt. Bewegt sich  $R$  stetig von  $P$  nach  $Q$ , so passiert er eine Stelle  $R_0$ , in welcher

$$u(R_0) = v(R_0) \leq \frac{1}{2}$$

ist.



Aus der Erörterung sub 5<sup>o</sup> folgt, dass, wenn  $KP$  in die Lage  $KQ$  gedreht wird, er ständig ein Durchmesser von  $\gamma$  bleibt. Im Speciellen ist also  $KR_0$  ein Durchmesser von  $\gamma$ . Legt man  $\gamma$  so in die Ebene von  $T_2$ , dass  $KR_0$  auf  $MN$  fällt, so wird  $T_2$  die ganze Figur  $\gamma$  enthalten.

8<sup>o</sup>. Die ganze Ueberlegung können wir kurz so charakterisiren: Mit Hülfe des unter 4<sup>o</sup>—5<sup>o</sup> bewiesenen Satzes kann man jede konvexe Kurve mit dem Durchmesser 1 von aussen so auspolstern, dass man auf ihr einen Kreis vom Radius 1 abrollen lassen kann. Dieses Abrollen geschieht ab und zu ruckweise. Aber soviel Stetigkeit ist vorhanden, dass man die Methode der Einschachtelung anwenden kann.

Herr Prof. HJELMSLEV hatte die Güte mich darauf aufmerksam zu machen, dass man beide Fälle vereint und vereinfacht wie folgt besprechen kann:

$\gamma$  ist eine Figur von der konstanten Breite 1. Es gibt einen und nur einen Durchmesser von  $\gamma$ , der die Richtung  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , hat; dieser heisse  $PQ$ ; der Durchmesser in der Richtung  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  heisse  $RS$ ; die Punkte  $R$  und  $S$  haben von  $PQ$  Entfernungen  $r = r(\varphi)$ , und  $s = s(\varphi)$ , und es ist  $r(0) - s(0) = -[r(\pi) - s(\pi)]$ . Also gibt es ein  $\varphi_0$ , für welches  $r(\varphi_0) = s(\varphi_0)$  ist, d. h. es gibt einen Durchmesser, der den zu ihm senkrechten Durchmesser halbirt. Daraus folgt die Brauchbarkeit der Tafel  $T_2$ .

9<sup>o</sup>.  $T_2$  ist keine Minimaltafel. Zieht man nämlich in Fig. 2 den Kreis, der die Seiten des Quadrates berührt, und zu diesem die Tangenten parallel zu den Diagonalen des Quadrates, so schneiden diese von  $T_2$  die Stücke I, II, III, IV ab. Plazirt man  $\mu$  auf  $T_2$ , so wird von I und III nur eines Punkte von  $\mu$  enthalten, ebenso von II und IV nur eines. Daher wird jede Figur  $\mu$  auf  $[T_2 - (I + II)]$

oder auf  $[T_2 - (I + IV)]$  Platz finden, also jedenfalls jede Figur  $\mu$  auf  $T_2 - I$ .

Die Fig. I hat das Flächenmass  $> 0,0241$ . (In der geschlossenen Form für das Flächenmass von I stehen Wurzelzeichen unter Wurzelzeichen; daher führe ich nur den logarithmisch berechneten Wert an).

Daher erfüllt  $\tau_0$  die Ungleichung

$$\tau_0 < 0,9132 - 0,0241 = 0,8891.$$

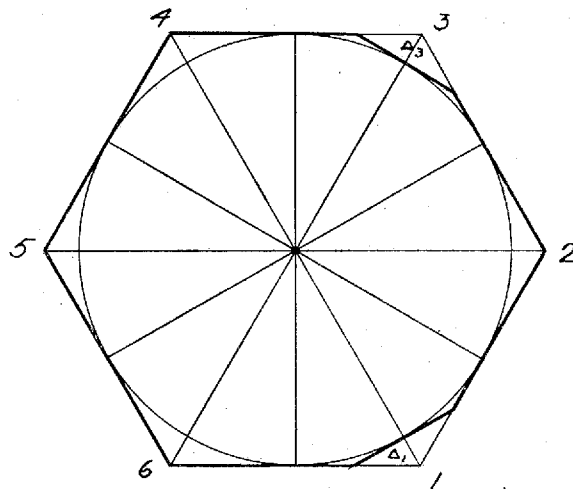


Fig. 3.

10<sup>0</sup>. In Fig. 3 ist 1, 2, 3, 4, 5, 6 ein regelmässiges Sechseck mit der Seitenlänge  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; zwei parallele Seiten haben die Entfernung 1. Dieses Sechseck ist eine brauchbare Tafel;<sup>1</sup> sie soll  $T_3$  heissen.

Ihr Flächenmass ist

$$\tau_3 = \tau(T_3) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 \dots$$

Die Ueberlegungen, die die Brauchbarkeit von  $T_3$  ersicht-

<sup>1</sup> d. h., dass nicht nur die JUNG-sche Kreistafel, sondern auch das eingeschriebene reguläre Sechseck ist eine Tafel  $T$ .

lich machen, sind in manchen Punkten von den obigen verschieden.

Zunächst zeigen wir die Richtigkeit eines Hilfssatzes:

11° Eine Tafel  $T$  ist gewiss brauchbar, wenn sie jede konvexe Kurve aufnehmen kann, deren Durchmesser kleiner als 1 ist und die eine stetig sich drehende Tangente, aber keine geradlinige Teile hat; d. h. unter den gemachten Voraussetzungen lässt sich jede konvexe Kurve  $\gamma$  mit dem Durchmesser 1 auf  $T$  plazieren.

Wir beginnen den Beweis des Hilfssatzes damit, dass wir Kurven  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$  zeichnen, die alle innerhalb  $\gamma$  verlaufen, sich stetig drehende Tangenten, doch keine geradlinigen Stücke haben und so gewählt sind, dass ein beliebiger Punkt  $P$  von  $\gamma$  eine Entfernung  $< \frac{1}{n}$  von  $\alpha_n$  hat. Ausserdem fixiren wir ein Dreieck  $ABC$ , dessen Ecken auf  $\gamma$  liegen. Hierauf legen wir  $\gamma$  so in die Ebene der Tafel  $T$ , dass  $\alpha_n$  ganz auf  $T$  zu liegen kommt; gleichzeitig soll das Dreieck  $ABC$  die Lage  $A_n B_n C_n$  annehmen.

Wir machen die Annahme, dass die drei Punktfolgen

$$A_1, A_2, A_3, \dots, B_1, B_2, B_3, \dots, C_1, C_2, C_3, \dots$$

gegen Punkte  $A_0, B_0, C_0$  der Tafelebene konvergieren. Wäre die Konvergenz von vornherein nicht vorhanden, so könnten wir sie durch Uebergang zu einer Teilfolge der Folge  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  erzwingen.

Durch die Lage  $A_0 B_0 C_0$  des Dreiecks  $ABC$  ist eine Lage der Kurve  $\gamma$  fixirt, die wir mit  $\gamma_0$  bezeichnen wollen;  $\gamma_0$  liegt auf  $T$ .

In der Tat: es sei  $P_0$  ein Punkt der Dreiecksebene  $A_0 B_0 C_0$ . Der in der Dreiecksebene  $A_n B_n C_n$  homologe Punkt heisse  $P_n$ . Die Folge  $P_1, P_2, P_3, \dots$  konvergirt gegen  $P_0$ .

Die Lage des Dreiecks  $A_n B_n C_n$  fixirt eine Lage  $\gamma_n$  von  $\gamma$ ; liegt  $P_0$  auf  $\gamma_0$ , so liegt  $P_n$  auf  $\gamma_n$ . Liegt  $P_0$  auf  $\gamma_0$  und  $P_n$  ausserhalb  $T$ , so ist die Entfernung des Punktes  $P_n$  von  $T$  jedenfalls  $< \frac{1}{n}$ ; denn die Lage  $\gamma_n$  ist so gewählt, dass  $\alpha_n$  ganz auf  $T$  liegt und  $P_n$  hat von  $\alpha_n$  eine Entfernung  $< \frac{1}{n}$ .

Aus diesem Umstand und aus  $P_n \rightarrow P_0$  folgt, dass  $P_0$  nicht ausserhalb  $T$  liegen kann.

Im Besitze dieses Hülfsatzes brauchen wir bei Untersuchung einer Tafel nur solche »reguläre« konvexe Kurven zu berücksichtigen, die eine sich stetig drehende Tangente, doch keine geradlinigen Stücke besitzen.

12°. Es sei nun  $X$  ein Punkt der regulären konvexen Kurve  $\bar{\gamma}$ . Wir ziehen die Gerade  $x$ , die  $\bar{\gamma}$  in  $X$  berührt, dann die zu  $x$  parallele Tangente und die zwei auf  $x$  senkrecht stehenden Tangenten. Eine der letzteren habe den Berührungspunkt  $X'$ . Die Seiten des berührenden Vierecks, welche  $\overset{X}{X'}$  enthalten, sollen die Längen  $\varphi = \varphi(X)$   
 $\varphi' = \varphi'(X)$  haben;  $\varphi(X)$  und  $\varphi'(X)$  ändern sich stetig, wenn  $X$  auf  $\bar{\gamma}$  sich stetig bewegt. Da  $\varphi(X) - \varphi'(X) = -[\varphi(X') - \varphi'(X')]$  ist, gibt es ein  $X = X_0$ , für welches  $\varphi(X_0) = \varphi'(X_0)$  ist; d. h. es gibt ein Quadrat, dessen Seiten  $\bar{\gamma}$  berühren.

Der Satz kann wie folgt verallgemeinert werden:

Unter den berührenden Parallelogrammen von  $\bar{\gamma}$  mit vorgeschriebenem spitzen Winkel  $\alpha$  gibt es solche mit 4 gleichen Seiten.

Man wäre versucht das Raisonement des Falles  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  auf das allgemeine  $\alpha$  wörtlich zu übertragen; aber eine solche Uebertragung wäre unstatthaft. Denn es ist nicht möglich ein berührendes Parallelogramm von  $\bar{\gamma}$  mit spitzem  $\alpha$  durch stetige Deformation so in sich selbst zu überführen,

dass 1) das deformierte Parallelogramm in jedem Zeitmoment wieder ein berührendes Parallelogramm von  $\bar{\gamma}$  sei; 2) der spitze Winkel  $\alpha$  konserviert bleibe, 3) zwei benachbarte Seiten des Parallelogramms durch die Deformation vertauscht werden.

Ein stichhaltiger Beweis ist folgender:

$X$  sei ein Punkt von  $\bar{\gamma}$ ,  $x$  die Gerade, die  $\bar{\gamma}$  in  $X$  berührt; wir drehen  $x$  um  $X$  um  $+\alpha$  in die Lage  $x'$  und ziehen die Tangenten von  $\bar{\gamma}$ , die parallel zu  $x$  und  $x'$  laufen; im

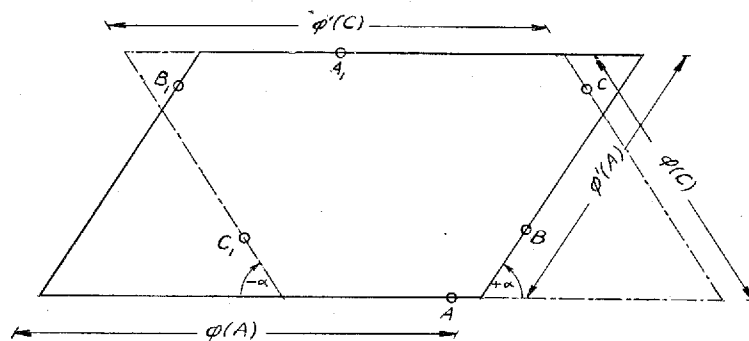


Fig. 4.

entstehenden Parallelogramm seien die Längen, der zu  $x$ , resp.  $x'$  parallelen Seiten:

$$\varphi = \varphi(X) \quad \text{und} \quad \varphi' = \varphi'(X).$$

$\varphi(X)$  und  $\varphi'(X)$  ändern sich stetig mit der Lage von  $X$ .

Wir wählen nun einen festen Punkt  $A$  auf  $\bar{\gamma}$ ; die Tangente  $a$  in  $A$  drehen wir um  $+\alpha$  in die Lage  $b$  und  $-\alpha$  in die Lage  $c$  und ziehen die zu  $a, b, c$  parallelen Tangenten von  $\bar{\gamma}$ . Ihre Berührungspunkte seien  $A, A_1, B, B_1, C, C_1$ . (Siehe Fig. 4). Nach passender Numerierung werden sie beim positiven Umlauf der Kurve in der Reihenfolge  $A, B, C, A_1, B_1, C_1$  angetroffen.

Da laut Fig. 4

$$\varphi(A) = \varphi'(C) \quad \text{und} \quad \varphi'(A) = \varphi(C)$$

ist, gibt es auf dem Bogen  $ABC$  einen Punkt  $X_0$ , in welchem die stetige Funktion  $\varphi(X) - \varphi'(X)$  verschwindet. Aus

$$\varphi(X_0) = \varphi'(X_0)$$

folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wir werden den Satz nur für  $\alpha = 60^\circ$  in Anspruch nehmen und sprechen ihn für diesen Fall, wie folgt, aus: Unter den berührenden Parallelogrammen der regulären Kurve  $\bar{\gamma}$  gibt es ein solches, das von einer Diagonalen in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegt wird.

13°. Als weitere Vorbereitung betrachten wir alle Punkte  $L$  ausserhalb  $\gamma$ , von welchen aus  $\gamma$  unter  $120^\circ$  gesehen wird. Ihre Gesamtheit bildet eine Jordan-Kurve  $\bar{\lambda}$ . Es sei nämlich  $O$  ein Punkt innerhalb  $\gamma$ . Dann liegt auf jedem von  $O$  ausgehenden Halbstrahl ein und nur ein Punkt  $L$ . Der Radiusvektor  $OL$  hängt stetig von der Richtung  $\varphi$  des Halbstrahles  $OL$  ab. Dieses folgt daraus, dass der Winkel  $\alpha = \alpha(P)$ ,  $0 < \alpha \leq 180^\circ$  der beiden von  $P$  an  $\gamma$  gelegten Stützgeraden stetig von der Lage von  $P$  abhängt. Also setzen die Punkte  $L$  die Jordan-Kurve

$$OL = r = r(\varphi)$$

zusammen.

14°. Wir ziehen ein Berührungsparallelogramm  $L_1 L_2 L_3 L_4$  zu  $\gamma$ , das durch die Diagonale  $L_1 L_3$  in zwei gleichseitige Dreiecke zerlegt wird.  $L_1$  und  $L_3$  liegen auf  $\bar{\lambda}$ .

Wir bewegen die Konfiguration der drei Halbstrahlen  $L_1 L_2$ ,  $L_1 L_3$  und  $L_1 L_4$  stetig so, dass  $L_1$  längs  $\bar{\lambda}$  von  $L_1$  nach  $L_3$  wandert und die Halbstrahlen  $L_1 L_2$  und  $L_1 L_4$  die Kurve  $\bar{\gamma}$  ständig berühren. In jedem Moment zerschneidet der

Halbstrahl  $L_1 L_3$  die Kurve  $\bar{\gamma}$  in zwei Bogen; der eine liegt auf dem Winkel  $\sphericalangle L_2 L_1 L_3$ , der andere auf  $\sphericalangle L_3 L_1 L_4$ . Diese Bogen haben von der Geraden  $L_1 L_3$  Maximaldistanzen  $\xi$  und  $\eta$ , die sich bei der Bewegung stetig ändern. Da  $(\xi - \eta)$  in der Anfangs- und Endlage entgegengesetzt-gleiche Werte haben, ist in einem Zwischenmoment  $\xi - \eta = 0$ , also  $\xi \leq \frac{1}{2}$  und  $\eta \leq \frac{1}{2}$ . In diesem Moment soll  $L_1 L_3$  die Lage  $L_1^\circ L_3^\circ$  haben.

Legt man  $\gamma$  so auf die Ebene des Sechsecks, dass  $L_1^\circ$  in eine Ecke des Sechsecks fällt und der Halbstrahl  $L_1^\circ L_3^\circ$  den Mittelpunkt des Sechsecks aufnimmt, so ist die ganze Figur  $\gamma$  auf dem Sechseck  $T_8$  enthalten.

15°. In  $T_8$  ziehen wir den Kreis, der die sechs Seiten von  $T_8$  tangirt und zu diesem die Tangenten, die auf die Symmetrieachsen des Sechsecks senkrecht stehen. Sie schneiden auf dem Sechseck Dreiecke ab, die wir mit  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6$  bezeichnen.

Plazirt man eine Menge  $\mu$  auf  $T_8$ , so wird von zwei gegenüberliegenden Dreiecken höchstens eines Punkte von  $\mu$  enthalten; im ganzen werden also höchstens drei von den 6 Dreiecken belegt sein. Ob nun von diesen 3, 2 oder keine cirkular benachbart sind: auf jeden Fall können  $\Delta_1$  und  $\Delta_3$  freigehalten werden. Also ist das in Fig. 3 starck ausgezogene Achteck eine brauchbare Tafel. Ihr Flächenmass ist

$$\tau_4 = \tau(T_4) = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} < 0,8454,$$

also ist

$$\tau_0 < 0,8454.$$

Dieses ist die beste obere Approximation, die ich für  $\tau_0$  finden konnte.

### 3. Numerische untere Näherungswerte für $\tau_0$ .

1<sup>0</sup>. Um die triviale untere Unbestimmtheitsgrenze  $\frac{\pi}{4}$  von  $\tau_0$  zu verschärfen, kann man so verfahren: Man zeichnet in einer Ebene das gleichseitige Dreieck mit der Seitenlänge 1 und den Kreis mit dem Durchmesser 1. Die kleinste konvexe Tafel, die die beiden Figuren in der betreffenden gegenseitigen Lage enthält, heisse  $G$ , das Flächenmass von  $G$  sei  $g$  und  $g_0$  sei die untere Grenze aller Zahlen  $g$ . Da jede brauchbare Tafel  $T$  eine Tafel  $G$  enthält, ist  $\tau_0 \geq g_0$ .

Der Wert von  $g_0$  ist, wie wir weiter unten berechnen werden, gleich  $\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} > 0,8257$ . Damit verschärft sich (1) in die Ungleichung

$$0,8257 < \tau_0 < 0,8454$$

und der Wert 0,8357 weicht von  $\tau_0$  um weniger als  $\pm$  Ein Hundertstel ab.

Die Berechnung von  $g_0$  führe ich detailliert aus, weil gewisse hierbei nötige Stetigkeitsbetrachtungen vielleicht auch sonstwo Anwendung finden können.

2<sup>0</sup>. Es sei  $v$  eine ebene, abgeschlossene, konvexe Punktmenge, ihre Grenze sei  $\bar{v}$ . Um jeden Punkt von  $v$  (nicht  $\bar{v}$  sondern  $v$ ) schlagen wir einen Kreis mit dem Radius  $\rho \geq 0$ . Alle diese abgeschlossenen Kreisflächen bilden eine Menge  $u = u(v, \rho)$ ; ihre Grenze sei  $\bar{u}$ . Die Menge  $u$  ist abgeschlossen und konvex. Für  $\rho = 0$  ist  $u \equiv v$  und  $\bar{u} \equiv \bar{v}$ . Für  $\rho > 0$  verläuft  $\bar{v}$  innerhalb  $\bar{u}$ . Jeder Punkt von  $\bar{u}$  resp.  $\bar{v}$  hat von  $\bar{v}$  resp.  $\bar{u}$  die Entfernung  $\rho$ . Deshalb heisst  $\bar{u}$  eine äussere Parallellkurve von  $\bar{v}$ .

Um den Punkt  $P$  von  $v$  kann man einen grössten Kreis schlagen, dessen abgeschlossene Scheibe ganz in  $v$  liegt;



sein Radius sei  $\sigma = \sigma(P)$ . Der Wert von  $\sigma$  ist  $\geq 0$ , je nachdem  $P$  innerhalb oder auf  $\bar{v}$  liegt;  $\sigma(P)$  ändert sich stetig mit der Lage von  $P$ ; der Maximalwert von  $\sigma(P)$  sei  $r = r(v)$ .

Wir wählen einen Wert  $0 \leq \rho \leq r$  und betrachten alle Punkte von  $v$ , für welche  $\sigma(P) \geq \rho$  ist. Diese Punkte bilden eine Menge  $v = v(v, \rho)$ ,  $\rho \leq r$ . Für  $\rho = 0$  ist  $v(v, \rho) \equiv v$ . Die Menge  $v$  ist abgeschlossen und konvex. Ihre Grenze  $\bar{v}$  verläuft für  $\rho > 0$  innerhalb  $\bar{v}$ .

Jeder Punkt von  $\bar{v}$  hat von  $\bar{v}$  die Entfernung  $\rho$ ; aber ein Punkt von  $\bar{v}$  kann von  $\bar{v}$  auch eine Entfernung, die grösser als  $\rho$  ist, haben.

Trotz der unvollständigen Analogie soll  $\bar{v}$  eine innere Parallellkurve von  $\bar{v}$  heissen.

Da das Jordan-sche Flächenmass von  $\bar{v}$  den Wert Null hat, bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \text{Flächenmass von } u(v, \rho) &\rightarrow \text{Flächenmass von } v \\ &\text{wenn } \rho \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5)$$

und

$$\begin{aligned} \text{Flächenmass von } v(v, \rho) &\rightarrow \text{Flächenmass von } v \\ &\text{wenn } \rho \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6)$$

3°. Die kleinste konvexe Punktmenge, die eine beschränkte Menge enthält, soll nach dem Vorschlag des Herrn BLASCHKE die konvexe Hülle jener Menge heissen.

Es seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei konvexe Bereiche, die konvexe Hülle von  $(\alpha + \beta)$  heisse  $\gamma$ . Wir bilden die Mengen  $u(\alpha, \rho)$ ,  $u(\beta, \rho)$  und  $u(\gamma, \rho)$ . Dann ist  $u(\gamma, \rho)$  die konvexe Hülle von  $[u(\alpha, \rho) + u(\beta, \rho)]$ . Denn ein Punkt von  $\gamma$ , der nicht zu  $(\alpha + \beta)$  gehört, liegt auf einer Strecke, die einen Punkt von  $\alpha$  mit einem Punkt von  $\beta$  verbindet.

Weiters bilden wir die Mengen  $v(\alpha, \rho)$ ,  $v(\beta, \rho)$  und  $v(\gamma, \rho)$ .

Die konvexe Hülle von  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$  ist nicht notwendig die Menge  $v(\gamma, \rho)$ , wie man an Beispielen zeigt, aber sie ist in  $v(\gamma, \rho)$  enthalten. Des weiteren besteht folgende Beziehung:

Die Zahl  $\rho_0 > 0$  sei fixiert. Dann ist  $v(\gamma, \rho_0)$  in der Hülle von  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$  für alle hinreichend kleinen Werte von  $\rho$  enthalten.

Diese Beziehung beweist man wie folgt:

Da bei  $\rho' < \rho''$  die Hülle von  $[v(\alpha, \rho'') + v(\beta, \rho'')]$  in der Hülle von  $[v(\alpha, \rho') + v(\beta, \rho')]$  enthalten ist, kann man durch die Methode der Einschachtelung schliessen:

Tritt  $v(\gamma, \rho_0)$  aus der Hülle aller  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$ ,  $\rho > 0$  heraus, so gibt es einen Punkt  $P$  von  $v(\gamma, \rho_0)$ , der ausserhalb der Hülle aller  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$ ,  $\rho > 0$  liegt.

Die Beziehung ist also bewiesen, wenn wir zeigen:

Ein beliebig fixierter Punkt  $P$  innerhalb  $\bar{\gamma}$  liegt innerhalb der Hülle von  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$ , wenn  $\rho = \rho(P)$  hinreichend klein gewählt wird.

Dieses letztere ist aber leicht einzusehen; ziehen wir nämlich zwei Sehnen  $P_1P_2$  und  $P_3P_4$  von  $\bar{\gamma}$ , die sich in  $P$  schneiden. Die Hülle von  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$  wird  $P$  im Innern enthalten, wenn sie in hinreichend kleine Umgebungen der Punkte  $P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  eindringt.

Nun ist  $P_i$  entweder auf der Grenze von  $\alpha$ , oder auf der Grenze von  $\beta$ , oder auf einer Strecke, die einen Grenzpunkt von  $\alpha$  mit einem Grenzpunkt von  $\beta$  verbindet.

Im ersten und zweiten Fall wird die Vereinigungsmenge  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$ , im dritten Fall die Hülle dieser Vereinigungsmenge in eine vorgeschriebene Umgebung von  $P_i$  eindringen, wenn  $\rho < \rho_i$  ist. Für  $\rho < \text{Min.}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$  liegt dann  $P$  im Inneren der Hülle von  $[v(\alpha, \rho) + v(\beta, \rho)]$ .

4°. Jetzt kann man in aller Strenge den (sehr plausibeln) Satz beweisen:

Hält man  $\alpha$  fest und bewegt  $\beta$  stetig, so ändert sich das Flächenmass von  $\gamma$  stetig; mit andern Worten:

Die Kurve  $\beta$  werde in die Lage  $\beta'$  verschoben; hierbei komme der Punkt  $P$  von  $\beta$  nach  $P'$  und die grösste der Strecken  $PP'$  habe die Länge  $d$ . Das Flächenmass der Hülle von  $(\alpha + \beta)$  geht über in das Flächenmass der Hülle von  $(\alpha + \beta')$  und erleidet eine Änderung  $e$ .

Wird  $\varepsilon$  beliebig angegeben, so gibt es ein  $\delta = \delta(\varepsilon)$  so, dass bei jeder Verschiebung von  $\beta$ , für welche  $d < \delta$  ist,  $e < \varepsilon$  sein wird.

Beweis: Wir wählen ein  $\delta_1$  so, dass das Flächenmass von  $[u(\gamma, \delta_1) - \gamma]$  kleiner sei, als  $\varepsilon$ . Ist bei einer Verschiebung  $d < \delta_1$ , so ist  $(\alpha + \beta')$  in  $[u(\alpha, \delta_1) + u(\beta, \delta_1)]$ , also in  $u(\gamma, \delta_1)$  enthalten; d. h. das Flächenmass der Hülle ist nach oben stetig.

Ferner wählen wir  $\delta_2$  so, dass das Flächenmass von  $[\gamma - v(\gamma, \delta_2)]$  kleiner als  $\varepsilon$  sei und hierauf ein  $\delta_3$  so, dass  $v(\gamma, \delta_2)$  in der Hülle von  $[v(\alpha, \delta_3) + v(\beta, \delta_3)]$  enthalten ist. Ist bei einer Verschiebung  $d < \delta_3$ , so ist  $v(\beta, \delta_3)$  in  $\beta'$ , also die Hülle von  $[v(\alpha, \delta_3) + v(\beta, \delta_3)]$  in der Hülle von  $(\alpha + \beta')$  enthalten; d. h. das Flächenmass der Hülle ist nach unten stetig.

5°. Kommt bei festgehaltenem  $\alpha$  und variabel gelagertem  $\beta$  das Flächenmass der Hülle von  $(\alpha + \beta)$  der Zahl  $h_0$  beliebig nahe, so gibt es eine Lage von  $\beta$ , in welcher das Flächenmass der Hülle genau  $= h_0$  ist.

Es sei nämlich das Dreieck  $ABC$  mit  $\beta$  starr verbunden; einer Folge von Lagen der Figur  $\beta$ , für welche die Flächen-

masse der Hülle gegen  $h_0$  konvergieren, entspricht eine Folge von Dreieckslagen  $A_n B_n C_n$ . Ein Häufungsdreieck sei  $A_0 B_0 C_0$ , die entsprechende Lage von  $\beta$  sei  $\beta_0$ . Die Hülle von  $(\alpha + \beta_0)$  hat laut dem oben bewiesenen Satz ein Mass, das weder grösser, noch kleiner sein kann, als  $h_0$ .

6°. Wir kehren jetzt zur Bestimmung des Zahlenwertes von  $g_0$  zurück. Nach dem soeben dargelegten ist  $g_0$  nicht

nur untere Grenze, sondern auch Minimum der Menge der Zahlen  $g$ ; es soll die zugehörige Tafel  $G_0$  vom Flächenmass  $g_0$  aufgesucht werden.

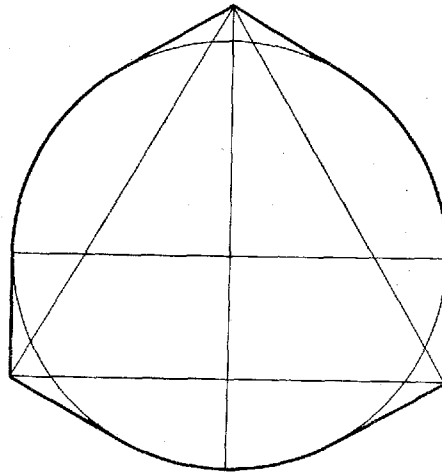


Fig. 5.

Es liegt nahe zu vermuten, dass  $G_0$  durch diejenige gegenseitige Lage von Kreis und Dreieck bestimmt wird, in welcher Kreis- und Dreiecksmittelpunkt zusammenfallen. In dieser

Lage entsteht die in Fig. 5 dargestellte Tafel  $G_1$  mit dem Flächenmass

$$g_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Wir werden zeigen, dass in der Tat  $g_0 = g_1$  ist. Hierzu betrachten wir alle möglichen gegenseitigen Lagerungen der beiden Figuren.

7°. Liegt der Kreismittelpunkt ausserhalb oder auf der Dreieckslinie, so ist  $g > \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ , wie eine durch den

Kreismittelpunkt gehende Stützgerade der Dreiecksfläche zeigt. Beim Aufsuchen von  $G_0$  haben wir also nur gegenseitige Lagen der zwei Figuren zu betrachten, bei welchen der Mittelpunkt  $O$  ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ) des Kreises  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  innerhalb der Dreiecksfläche  $ABC$  liegt.

8°. Hat der Punkt  $U$  den Abstand  $u \geq \frac{1}{2}$  vom Kreismittelpunkt, so hat die konvexe Hülle von (Kreis +  $U$ ) das Flächenmass

$$\frac{\pi}{4} + f(u) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \left[ \sqrt{4u^2 - 1} - \arccos \frac{1}{2u} \right],$$

$$u \geq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \arccos \frac{1}{2u} < \frac{\pi}{2}.$$

Bemerken wir, dass  $f'(\frac{1}{2}) = 0$  ist und dass  $f(u)$  und  $f'(u)$  für  $u \geq \frac{1}{2}$  stetig wachsen.

9°. Liegt die Dreiecksecke  $A$  innerhalb des Kreises  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  und dringt die Gerade  $BC$  in den Kreis nicht ein, so ist

$$g \geq \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} > g_1,$$

wie die zu  $BC$  parallele und durch  $O$  ziehende Sehne von  $G$  zeigt. Liegt  $A$  innerhalb des Kreises und dringt  $BC$  in den Kreis ein, so ist

$$g = \frac{\pi}{4} + f(b) + f(c),$$

wo  $b$  und  $c$  die Abstände  $OB$  und  $OC$  bedeuten. Dreht man das Dreieck so um  $B$ , dass  $C$  sich  $O$  nähert, so bleibt  $f(b)$  unverändert und  $f(c)$  nimmt ab. Also liegt auf der Tafel  $G_0$  kein Eckpunkt des Dreiecks innerhalb des Kreises.

10°. Liegt  $A$  auf der Kreisperipherie, etwa im Punkte  $(x = -\frac{1}{2}, y = 0)$ , so liegen  $B$  und  $C$  auf der Halbebene  $x > 0$ . Bei einer Verschiebung des Dreiecks um  $\xi$  in der Richtung der  $x$ -Achse ist für  $g = g(\xi)$

$$\frac{dg(\xi)}{d\xi} = f'(a) \frac{da}{d\xi} + f'(b) \frac{db}{d\xi} + f'(c) \frac{dc}{d\xi},$$

wo  $a, b, c$  die Distanzen der Dreiecksseiten vom Kreismittelpunkt bedeuten. Da

$$f'(a) = 0, \quad f'(b) > 0, \quad f'(c) > 0, \quad \left(\frac{db}{d\xi}\right)_{\xi=0} > 0, \quad \left(\frac{dc}{d\xi}\right)_{\xi=0} > 0$$

ist, kann die Lage  $\xi = 0$  nicht das Minimum von  $g$  liefern.

Daher kommen für  $G_0$  nur Lagen in Betracht, in welchen jeder Eckpunkt des Dreiecks ausserhalb des Kreises fällt und jede Seite des Dreiecks in den Kreis eindringt. In einer solchen Lage ist

$$g = \frac{\pi}{4} + f(a) + f(b) + f(c).$$

11°. Es seien nun  $a, b, c$  nicht alle gleich, z. Bp. sei  $b > c$ . Der Eckpunkt  $A$  liege wieder auf der negativen  $x$ -Achse,  $B$  über,  $C$  unter der  $x$ -Achse. Verschieben wir das Dreieck in der Richtung der  $y$ -Achse um  $\eta$ , so ist für  $g = g(\eta)$

$$\left(\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=0} = f'(a) \left(\frac{da}{d\eta}\right)_{\eta=0} + f'(b) \left(\frac{db}{d\eta}\right)_{\eta=0} + f'(c) \left(\frac{dc}{d\eta}\right)_{\eta=0}.$$

Hierbei ist

$$\left(\frac{da}{d\eta}\right)_{\eta=0} = 0, \quad \left(\frac{db}{d\eta}\right)_{\eta=0} > 0, \quad \left(\frac{dc}{d\eta}\right)_{\eta=0} < 0, \quad f'(b) > 0, \quad f'(c) > 0,$$

und

$$\left(\frac{db}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \sin \beta, \quad \left(\frac{dc}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \sin \gamma,$$

wo  $\beta$  und  $\gamma$  die Winkeln bedeuten, die die Halbstrahlen  $OB$  und  $OC$  mit der positiven  $x$ -Achse einschliessen. Elementargeometrisch zeigt man, dass  $\sin \beta > 0$ ,  $\sin \gamma < 0$  und  $|\sin \beta| > |\sin \gamma|$  ist. Hieraus folgt

$$\left(\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right)_{\eta=0} > 0,$$

d. h. die betrachtete Lage  $ABC$  kann für  $g$  nicht den Wert  $g_0$  ergeben.

Die einzige übrige Möglichkeit ist

$$a = b = c, \text{ also ist } g_0 = g_1.$$

12°. Der Apparat, der für diesen bescheidenen Specialfall angewendet wurde, kann, wie ich glaube, nicht wesentlich vereinfacht werden, wenn man nur einen wirklichen Beweis führen will.

Die in Fig. 5 dargestellte Tafel ist auch fähig das Kreisbogensdreieck von der konstanten Breite 1 aufzunehmen. Bei dem Versuch, andere Paare von exponirten Figuren zu kombiniren, kam ich zu keiner weiteren Verschärfung der unteren Grenze von  $\tau_0$ .

Dann versuchte ich die kleinste Tafel zu bestimmen, die drei gegebene Figuren aufnimmt. Hierbei stiess ich aber auf alle Schwierigkeiten des allgemeinen Problems.

13°. Die Tafel  $G_1$  ist keine Minimaltafel. So ist es beispielweise nicht möglich das reguläre Kreisbogenfünfeck von der konstanten Breite 1 auf  $G_1$  zu plaziren.

14°. Es sei auch bemerkt, dass  $G_1$  eine und die einzige unter den Tafeln  $G$  ist, für welche der Umfang  $u = u(G)$  ein Minimum ist.

Der Umfang von  $G_1$  ist

$$u_1 = 4g_1 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3}.$$

Dass jede von  $G_1$  verschiedene Tafel  $G$  einen Umfang  $u > u_1$  hat, sieht man wie folgt ein:

Liegt der Kreismittelpunkt nicht innerhalb der Dreiecksfläche, so ist

$$u \geq \frac{\pi}{2} + 2 > u_1;$$

denn werden  $C$  und der Kreismittelpunkt durch die Gerade  $AB$  getrennt, oder liegt  $O$  auf der Geraden  $AB$ , so teilt die Gerade  $AB$  den Umfang von  $G$  in zwei Bogen, deren einer  $\geq \frac{\pi}{2}$ , der andere  $\geq 2$  ist.

Liegt  $O$  innerhalb der Dreiecksfläche,  $A$  innerhalb des Kreises und dringt die Gerade  $BC$  nicht in den Kreis ein, so ziehe man die Sehne  $KL$  von  $G$ , die durch den Kreismittelpunkt geht und parallel zu  $BC$  läuft. Einer der durch  $K$  und  $L$  begrenzten Bogen von  $G$  ist  $\geq \frac{\pi}{2}$ , der andere  $\geq 2$ , da der Abstand der Geraden  $BC$  und  $KL$  zumindest  $\frac{1}{2}$  ist. Also ist in einem solchen Fall wieder

$$u > u_1.$$

Bei jeder anderen Lagerung von Kreis und Dreieck besteht der Umfang von  $G$  aus Bogen- und Tangentstücken des Kreises  $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ; dann ist aber Umfang und Flächenmass von  $G$  proportional und man hat

$$u = 4g \geq 4g_1 = u_1$$

und das Gleichheitszeichen gilt nur für die Tafel  $G_1$ .

#### 4. Existenz von minimalen Tafeln.

<sup>10</sup>. Zuletzt beweise ich, dass es brauchbare Tafeln vom Flächenmass  $\tau_0$  wirklich gibt. Der Schlüssel



des Beweises ist der schöne Satz des Herrn BLASCHKE über konvergente Folgen konvexer Gebiete,<sup>1</sup> der für uns in folgender Fassung in Betracht kommt:

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$  sei eine Folge von ebenen, abgeschlossenen, konvexen Gebieten; jedes  $\mu_i$  sei im Kreise  $x^2 + y^2 \leq R^2$  enthalten und jedes enthalte den Kreis  $x^2 + y^2 \leq r^2$ .

Dann gibt es eine Teilfolge  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  der Folge der  $\mu_i$  und ein konvexes Gebiet  $\nu$  mit folgenden Eigenschaften:

1) Wird  $\rho > 0$  beliebig angegeben, so sind alle  $\nu_{k+1}, \nu_{k+2}, \nu_{k+3}, \dots$  in  $u(\nu, \rho)$  enthalten, wenn  $k = k(\rho)$  passend gewählt wird; 2) wird  $0 < \rho < r$  beliebig angegeben, so ist der Bereich  $v(\nu, \rho)$  in allen  $\nu_{l+1}, \nu_{l+2}, \nu_{l+3}, \dots$  enthalten sein, wenn  $l = l(\rho)$  hinreichend gross gewählt wird.

Aus diesen Beziehungen folgt dann:

$$\begin{aligned} \text{Flächenmass von } \nu_k &\rightarrow \text{Flächenmass von } \nu \\ \text{wenn } k &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Wir denken uns nun eine brauchbare Tafel  $T_n$  so bestimmt, dass ihr Flächenmass  $< \tau_0 + \frac{1}{n}$  sei und legen sie so in die Ebene, dass der Mittelpunkt des in  $T_n$  enthaltenen grössten Kreises auf den Punkt  $x = 0, y = 0$  falle. In dieser Lage soll die Tafel  $\mu_n$  heissen; die durch die Teilfolge  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  bestimmte Grenztafel  $\nu$  hat dann laut (7) das Flächenmass  $\tau_0$ ;  $\nu$  ist aber eine brauchbare Tafel.

Es sei nämlich  $\gamma$  eine konvexe Kurve vom Durchmesser 1,  $ABC$  ein mit  $\gamma$  starr verbundenes Dreieck;  $\gamma_i$  sei eine Lage von  $\gamma$ , die in  $\nu_i$  enthalten ist; dabei komme  $ABC$  in die Lage  $A_i B_i C_i$ . Ein Häufungsdreieck der Folge  $A_1 B_1 C_1$ ,

<sup>1)</sup> Kreis und Kugel. Leipzig 1915, pg. 62.

$A_2 B_2 C_2, A_3 B_3 C_3, \dots$  sei  $A^0 B^0 C^0$ , die entsprechende Lage von  $\gamma$  heiße  $\gamma^0$ . Dann ist  $\gamma^0$  in  $v$  enthalten.

Ist nämlich  $P^0$  ein Punkt auf  $\gamma^0$ , so ist er Häufungspunkt der Menge der homologen Punkte  $P_1, P_2, P_3, \dots$ . Von einem  $k = k(\rho)$  angefangen liegen alle Punkte  $P_{k+1}, P_{k+2}, P_{k+3}, \dots$  innerhalb  $u(v, \rho)$ , da ja die Kurven  $\gamma_{k+1}, \gamma_{k+2}, \gamma_{k+3}, \dots$  auf Tafeln, die innerhalb  $u(v, \rho)$  liegen, placiert sind. Hieraus folgt, dass  $P^0$  nicht ausserhalb  $v$  liegen kann.

2°. Der Beweis ist — freilich dank des BLASCHKE-schen Satzes — überaus einfach; es ist mir aber nicht gelungen zu entscheiden, ob es eine oder mehrere Tafeln  $T$  vom Masse  $\tau_0$  gibt.

3°. Nachdem die Existenz von Minimaltafeln nachgewiesen ist, kann man die Ungleichung  $\tau_0 \geq g_0$  in  $\tau_0 > g_0$  verschärfen. Enthält nämlich die Tafel  $T_0$  die Tafel  $G_1$ , so ist laut III. 13° die Tafel  $G_1$  ein echter Teil von  $T_0$ . Enthält  $T_0$  die Tafel  $G_1$  nicht, so enthält sie eine von  $G_1$  verschiedene Tafel  $G$ , die schon für sich ein Mass  $> g_1$  hat.

4°. Ein zum behandelten duales Problem ist das folgende:

Unter allen Tafeln  $T$ , welche die Ueberdeckungseigenschaft haben, sind diejenigen festzustellen, deren Umfang  $u = u(T)$  minimal ist.

Die Existenz der Lösung wird genau, wie bei dem ersten Problem, nachgewiesen. Ist  $u_0$  der minimale Umfang, so ist

$$4g_0 < u_0 \leq u(T_4)$$

oder

$$3,302 < u_0 < 3,382,$$

und der Wert 3,342 gibt  $u_0$  bis auf  $\pm 4/100$  genau an.

Offen bleibt die Frage, ob die Lösung des zweiten Problems eindeutig ist und ob die beiden Probleme eine gemeinsame Lösung besitzen. Nach Form, Flächenmass und Umfang von  $T_4$  wird man es für wahrscheinlich ansehen können, dass beide Probleme je eine Lösung haben und dass diese Lösung für beide von derselben Form ist.

København, August 1919.

*Dr. Julius Pál*  
*aus Győr, Ungarn.*